

АВАНТУРЕ НА ПАПИРУ

Математичко-уметничке активности за учење математике базирано на искуству

Уредници: Кристоф Фењвеш, Илона Олање Тегласи
и Ивоља Прокајне Силађи



VISUALITY &
MATHEMATICS

EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

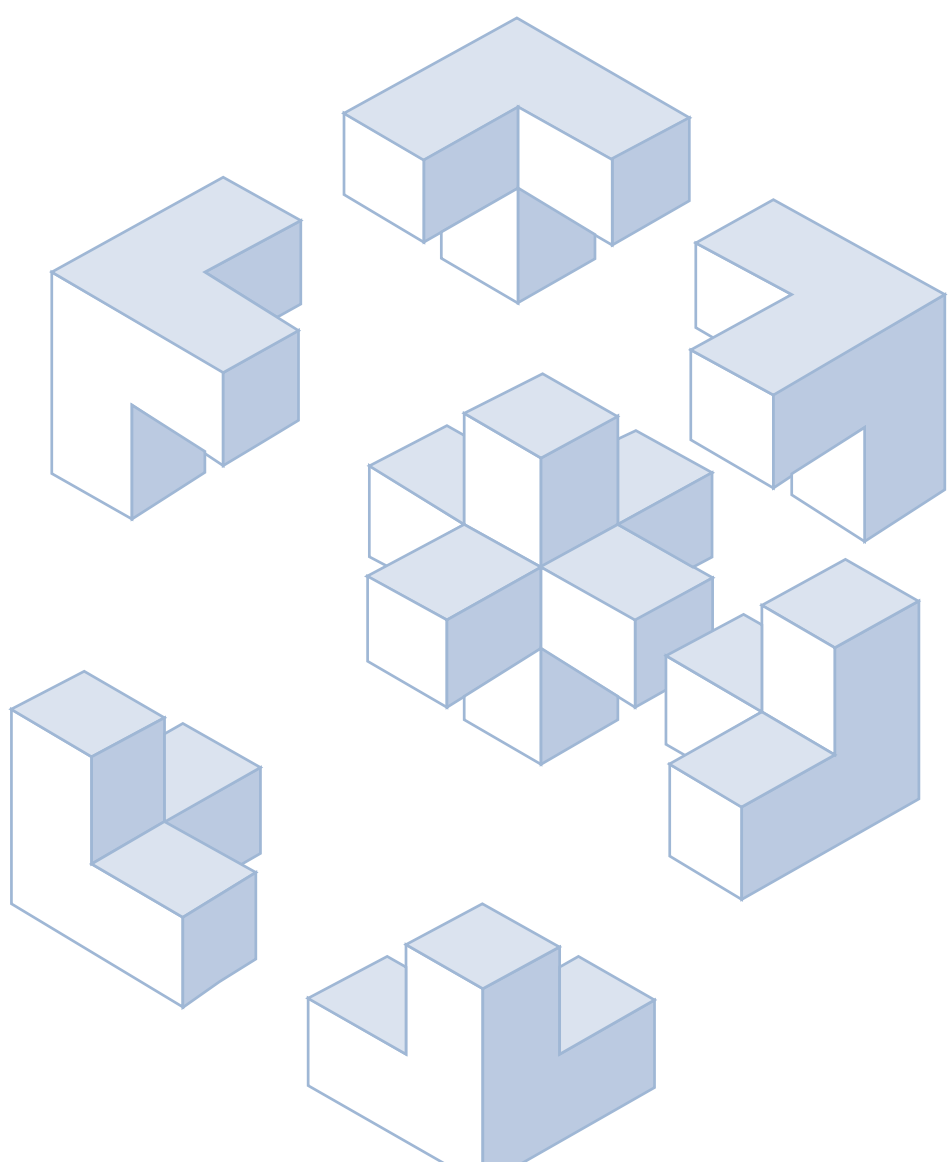
Темпус Пројекат “Visuality & Mathematics: Experiential Education of Mathematics
through Visual Arts, Sciences and Playful Activities”
530394-TEMPUS-1-2012-1-HU-TEMPUS-JPHES

Веб страна: <http://vismath.ektf.hu/>

Издавач:



Eger, 2014



АВАНТУРЕ НА ПАПИРУ

Математичко-уметничке активности
за учење математике базирано на искуству

Уредници: Кристоф Фењвеш, Илона Олање Тегласи
и Ивоља Прокајне Силађи

Темпус Радна Свеска Интернационални Уредници :

Dirk Huylebrouck (University of Leuven)

Raine Koskimaa (University of Jyväskylä)

Kálmán Liptai (Eszterházy Károly College)

Ruth Mateus-Berr (University of Applied Arts Vienna)

Ljiljana Radovic (University of Nis)

Рецензенти: Miklós Hoffmann и Мирослава Игњатовић

Дизајн корица: Снежана Чубриловић

Дизајн прелома: Zoltán Peternák

Штампа: Kvíz Ltd.

This book is published and copyrighted by the Eszterházy Károly College, Eger, Hungary, © 2014.

All rights reserved. No part of this book shall be reproduced, stored in a retrieval system,
or transmitted by any means – electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise –
for business purposes, without written permission from the publisher or the authors.

Supported by:



Темпус Пројекат “Visuality & Mathematics: Experiential Education of Mathematics
through Visual Arts, Sciences and Playful Activities”

530394-TEMPUS-1-2012-1-HU-TEMPUS-JPHES

Веб страна: <http://vismath.ektf.hu/>

ISBN: 978-615-5297-27-4

Eszterházy Károly College
Eger, 2014

АВАНТУРЕ НА ПАПИРУ

Математичко-уметничке активности за учење математике базирано на искуству

Садржај

УВОД (Кристоф Фењвеш-Илона Олање Тегласи -Ибоља Прокајне Силађи)	5
--	---

Загонетне Симетрије

Славик В. Јаблан-Љиљана Радовић: Шаблони, симетрије, модуларност и игре са плочицама	11
Роберт Фатхауер: Украшавање полиедара коришћењем Ешерових теселација	27
Илона Олање Тегласи: Игре типа танграма и игре са шибицама	37
Елеонора Штетнер: Мебијусова трака и симетрије бордура	45

Арбеске и Квазикристали

Џеј Бонер: Многоугаона техника у исламском геометријском дизајну	61
Жан-Марк Кастера: Арабеске и квазикристали	73
Реза Сарханги: Украшавање правилних полиедара коришћењем историјских персијских чврсто повезаних полигоналних образаца у облику звезде	85

Варљиве Структуре, Разигране Перспективе

Тамаш Ф. Фаркаш: Немогући објекти, парадоксалне фигуре	101
Џорџ Глејзер- Лилиан Визер: Хајде да се играмо Индијанаца!	119
Кристоф Фењвеш- Илдико Сабо: Изградња геодезијске куполе и креирање анаморфоза на Радионици искуства – Међународног математичко-уметничког покрета за математичко образовање засновано на искуству	125
Дирк Хојлебрук: Радионице са 3Д фракталима	139

Папирне Скулптуре

Џорџ Харт: „Уклизаваач“, геометријска папирна конструкција	149
Ринус Ролофс: Леонардови издигнути полиедри – модели	160
Ферхан Кизилтепе: Две вежбе о димензијама, површима и запреминама у математици	177
Кристина Бурчик – Војћех Бурчик: Математичке авантуре у оригамију	191



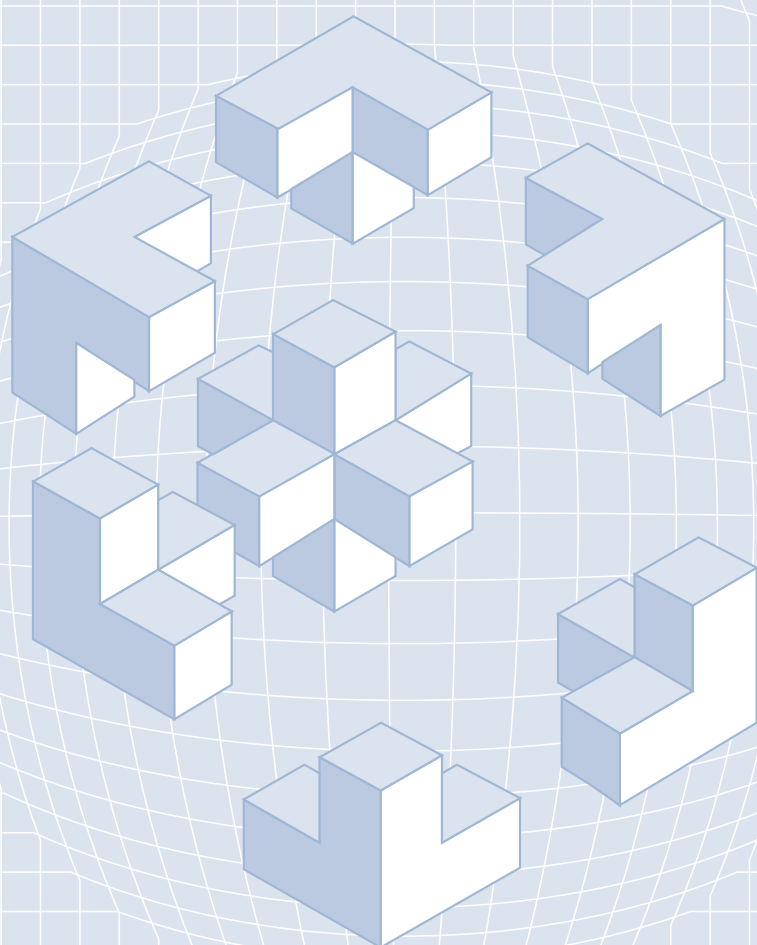
VISUALITY &
MATHEMATICS

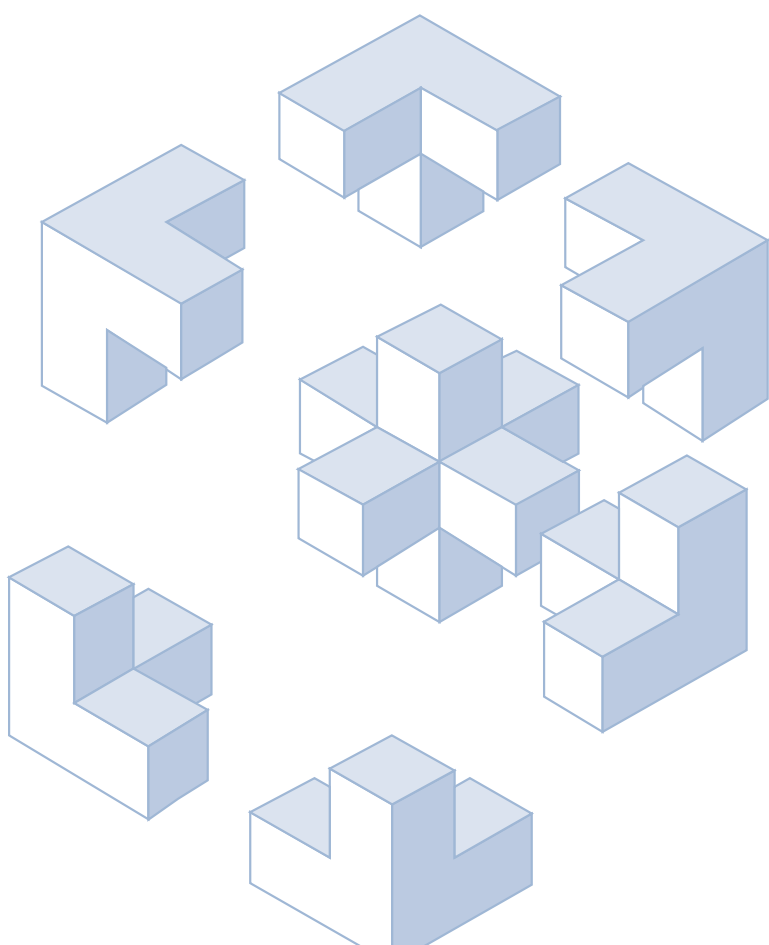
EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

Кристоф Фењвеш,
Илона Олање Тегласи
Ивоља Прокајне Силађи

УВОД

АВАНТУРЕ НА ПАПИРУ





УВОД

1 Авантуре на Папиру – Нису само за часове математике!

„*The Visuality & Mathematics – Experimental Education of Mathematics through Visual Arts, Sciences and Playful Activities*“, Темпус пројекат је подржан од Европске Уније и започет 2012-те године у кооперацији осам институција из Аустрије, Белгије, Финске, Мађарске и Србије. Један од главних циљева овог двогодишњег, међународног заједничког подухвата јесте развој едукационих материјала, метода и алата за учење који би допринели учењу математике кроз искуство. Заједно са интердисциплинарним тимом математичара, уметника, педагога, наставника у основним и средњим школама и студената, имали смо као педагошки циљ поновно буђење веза између математике и визуелне уметности. За ту сврху смо предложили различите математичко-уметничке активности и задатке забавног и креативног карактера за коришћење на часовима математике.

Ова публикација је образовни алат који пружа радне материјале и детаљне методолошке описе за реализацију, скоро четрдесет интерактивних математичко-уметничких радионица, на часовима. Велики број значајних међународних представника визуелне математике, математичке уметности и методологије учења математике кроз искуство је учествовало у развоју укључених материјала. Већина изабраних активности се може извршити користећи само папир или картон или се, у неким случајевима, захтева опрема која је лако доступна у већини школа, као што су маказе, бојице и, највише, фотокопир апарат.

Надамо се да ће наставници који користе наш приручник успети у подстицању својих ученика да виде математику као весео подухват, пре него сувопаран и досадан предмет за који многи сматрају да то јесте¹. Штавише, ми се надамо да ће се ова збирка усвојити као приручник, не само међу наставницима математике већ и наставницима у уметности, који желе да осветле везе између две дисциплине: уметности и математике.

2 Нови трендови у образовању: стручност и искуство

Друштво се креће таквим темпом данас, да је битно да наше школе оспособе ученике да прихвате промене, да буду спремни за сарадњу, за успешно приступање изазовима како на појединачном тако и колективном нивоу, као и да се припреме за доживотно учење. Математичка компетенција је једна од кључних компетенција за коју постоји потреба да се побољша у јавном образовању. Међутим, подучавање математике у основним и средњим школама, као чисто апстрактне науке, користећи само традиционалне методе и технике је застарело. Математика, као и све друге науке се развија тако брзо да је немогуће да се интегришу у наставни програм сва кретања у области. Ту је и парадокс да се математика, иако широко коришћена у свим индустријализованим друштвима, доживљава, од стране ученика, као тежак и непријатан предмет². Промене у приступу математичког образовања стога касне и, што је још важније, су неопходне.

Математичко образовање у школама треба да развија системско размишљање, да буде базирано на применљивом знању, приступима базираним на искуству и, изнад свега, процес учења треба да постане још веселије и привлачно искуство. Истовремено, међутим, садржај учења не може да буде у супротности са најсавременијом математиком, као науком. Да би спровели све ово у свакодневну наставу није лак задатак, али је остварив предлог. Ова радна свеска је покушај да се понуди један такав алтернативни допринос, ангажујући и упознавајући ученике са садржајем математике на активан, практичан начин, успут откривајући математичке везе у визуелној уметности кроз креативне, забавне и привлачне активности.

Визуелни, забавни и искуствени приступ учењу математике има богату модерну методолошку позадину и историју, почевши од радова Jerome Brunera³, Martin Gardnera, Zoltán Dienesa⁴, или Tamás Varga⁵. Од скоро, међународне интердисциплинарске заједнице, као што су *Мостови* (www.bridgesmathart.org) и *International Symmetry Association* (www.symmetry.hu) или *Experience Workshop – International Math-Art Movement* (www.experienceworkshop.hu) и друге организације ефикасно заступају овакав приступ. Значај програма који

¹ Cf. Fenyvesi, Mateus-Berr, Koskimaa, Radovic, Takaci, Zdravkovic (2014) Serbian Students' Attitudes towards Mathematics and Mathematical Education. Tempus Attitude Survey (TAS) 2013-2014 Report. Jyväskylä: University of Jyväskylä

² Cf. Rogerson, A. (1986), MISF - A New Conception of Mathematics, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 17. 5.

³ Bruner, J. (1977), The Process of Education, Harvard University Press.

⁴ Dienes, Z. P. (2002), *Mathematics as an Art form. An essay about the stages of mathematics learning in an artistic evaluation of mathematical activity*. Retrieved from <http://www.zoltandienes.com/wp-content/uploads/2010/05/Mathematics_as_an_art_form.pdf>

⁵ Varga, T.-Servais, W. (1971), *Teaching School Mathematics*, Penguin, Harmondsworth.

повезују уметност, науку и образовање, као и њихове могуће улоге у пружању корисних идеја за наставнике, се не може потценити.

Пружање довољне мотивације ученицима је можда један од највећих изазова, пошто је данашња омладина изложена многим утицајима у сваком подручју свакодневног живота, и школи није лако да се такмичи са тиме. Међутим, приближавање ученика предмету је један од кључева учења. Ова књига има задатак да помогне у томе. Према румунском математичару Григоре Моисилу: “Математичар се бави математиком, зато што она види нешто лепо у њој, нешто занимљиво што јој се свиђа, што је натера да се замисли и која је понесе. Машта је извор саме информације.”⁶ Нека се ваши студенти ослањају на своју машту, учините да студенти мисле математички кроз креативне и забавне активности!

3 Садржај

Наш приручник обухвата укупно петнаест тема, распоређених у четири поглавља. Прво поглавље, *Загонетне Симетрије* се започиње чланком и радионицом Славика Јаблана и Љиљане Радовић. Аутори су међународно признати представници интердисциплинарних области визуелне математике, теорије симетрија, као и теорије чворова. Њихов чланак даје карактеристични доказ о изузетном образовном потенцијалу у њиховим главним областима истраживања и њихове дискусије о теорији симетрија могу да послуже као теоријски увод за све теме у нашој књизи. Чланак бившег НАСА инжењера и тренутно кустоса конференције *Мостови*, Роберта Фатхауера, следи пут једног од најпознатијих уметника математичара, М. С. Escher-a, и повезује тему планарних теселација са истраживањима о просторним телима. Експерт забавног математичког образовања и развоја компетенција, професор Универзитета у Егеру, један од уредника наше књиге, Илона Олање Тегласи, у свом чланку представља танграм игре и игре са шибицама, које се лако примењују на часовима, са циљем побољшања више група компетенција. У наставку, Елеонора Штетнер, математичар и координатор истраживања у Радионици искуства, позива студенте у свет графова и симетрија бордура реализованим на Мебиусовој траци. Друго поглавље, *Арабеске и Квазикристали* почиње са математичко-уметничко-едукационим алатима које је развио Џеј Бонер, један од најпознатијих стручњака за исламске украсе и дизајн, водећег реставратора који је радио на очувању неколико историјских грађевина у исламском свету. Бонер упућује читаоце у тајне стварања сложених исламских геометријских орнаменти и шара. Жан-Марк Кастера из Француске, дизајнер и водећи стручњак за уметност на неколико архитектонских пројеката на Блиском истоку проширује Бонерове активности и описује наредне методе исламског дизајна шара и повезује их са резултатима кристалографских студија о квази-кристалима. Експерт древне персијске уметности и председник организације Мостови, Реза Сарханги представља примену исламских шара на површину неких занимљивих тела.

На почетку трећег поглавља *Варљиве Структуре, Разигране Перспективе*, уметник Тамаш Ф. Фаркаш дели геометријско знање које је позадина његових уметничких “немогућих фигура”, који су вредне проучавања како из естетских разлога тако и са научног становишта. Ф. Фаркашово дело показује читаоцу да креирање “немогућих” фигуре није уопште немогуће, чак и да није превише тешко, ако неко има неопходно математичко знање. Џорџ Глејзер, професор математике и фотограф, аутор неколико научних и популарних књига математике о визуелним представама математике, заједно са уметником Лилиан Визер позива студенте на изванредну авантуру: свако може да спекулише и тестира које је то математичко знање било потребно да Наска људи креирају гигантске фигуре у Наска пустињи на југу Перуа. Кристоф Фењвеш, један од уредника ове књиге и координатор неколико математичко-уметничких организација и истраживач Универзитета Јиваскула, заједно са наставником математике и педагошким координатором Радионице искуства, Илдико Сабо уводи ученике у изградњу великог модела Бакминстер-Фулерове чувене геодезијске куполе на часу. У свом чланку они такође уводе методе израде анаморфних слика на часу. Професор математике и реномирани светски популатор математике Дирк Хојлебрук, белгијски координатор нашег пројекта *Визуалност & Метематика*, нам открива “чаробну формулу” и услове за изградњу тродимензионалног фракталног дрва као и изградњу Сьерпинске пирамиде од балона.

У завршном поглављу *Папирне Скулптуре*, професор математике и стварна “звезда” међународне математичко-уметничке сцене и један од директора организације Мостови, Џорџ Харт, упознаје читаоце са тродимензионалним структурама креираним од папирних модула на генијалан и једноставан начин. Хартове “уклизавааче” следи богат материјал холандског математичког вајара, Ринус Роелофса, који нуди конкретна решења за тродимензионално моделовање фигура дизајнираних од стране једног од највећих математичко-уметничких генија свих времена, Леонарда да Винчија. Турски математичар и уметник, Ферхан Кизилтепе, показује како да направите високо естетске и минималистичке уметничке композиције засноване на врло једноставним геометријским процедурама.

Наравно, није могуће имати књигу која шири математичко-уметничке везе без, бар једне, активности која укључује оригами. Математичке везе у савијању папира и оригамијев велики потенцијал у математичком

⁶ *Aforizmak, anekdotak matematikusokról, matematikáról* (1999), ed. Bitay, László. Kolozsvár: Radó Ferenc Matematikaművelő Társaság.

образовању су широко познати и прихваћени. Чланак који затвара нашу колекцију нам осветљава увид у све ово, на основу материјала и методе пољских оригами уметника и математичких стручњака за образовање, Војћеха и Кристине Бурчик.

4 Како користити ову књигу?

Захваљујући јединственим карактеристикама ове књиге, сви шаблони радионица су штампани на страницама које се могу лако ископирати и копије се могу поделити ученицима који учествују у одређеној радионици. Неопходно је да се наставници не само удубе у тему изабраног радионице, већ и да пажљиво испланирају активности радионице, да испробају и тестирају сваки од планираних процедура пре одржавања радионице. Током активности радионице је важно испланирати, радије мање него више, вежби које треба да се изврше у датом временском периоду и да се ученицима остави довољно времена и простора за дискусију. Штавише, важно је да се планирају и директне радионице према дидактичким разматрањима учења математике кроз истраживање⁷ и учење математике базирано на искуству⁸, да би се створила неформална атмосфера потребна за продуктивно учење и да би се развила креативност, тимски рад као и да би се мотивисала колективна дискусија и да би се помогло ученицима који вероватно заостају у корацима спровођења радионице стрпљиво и смело.

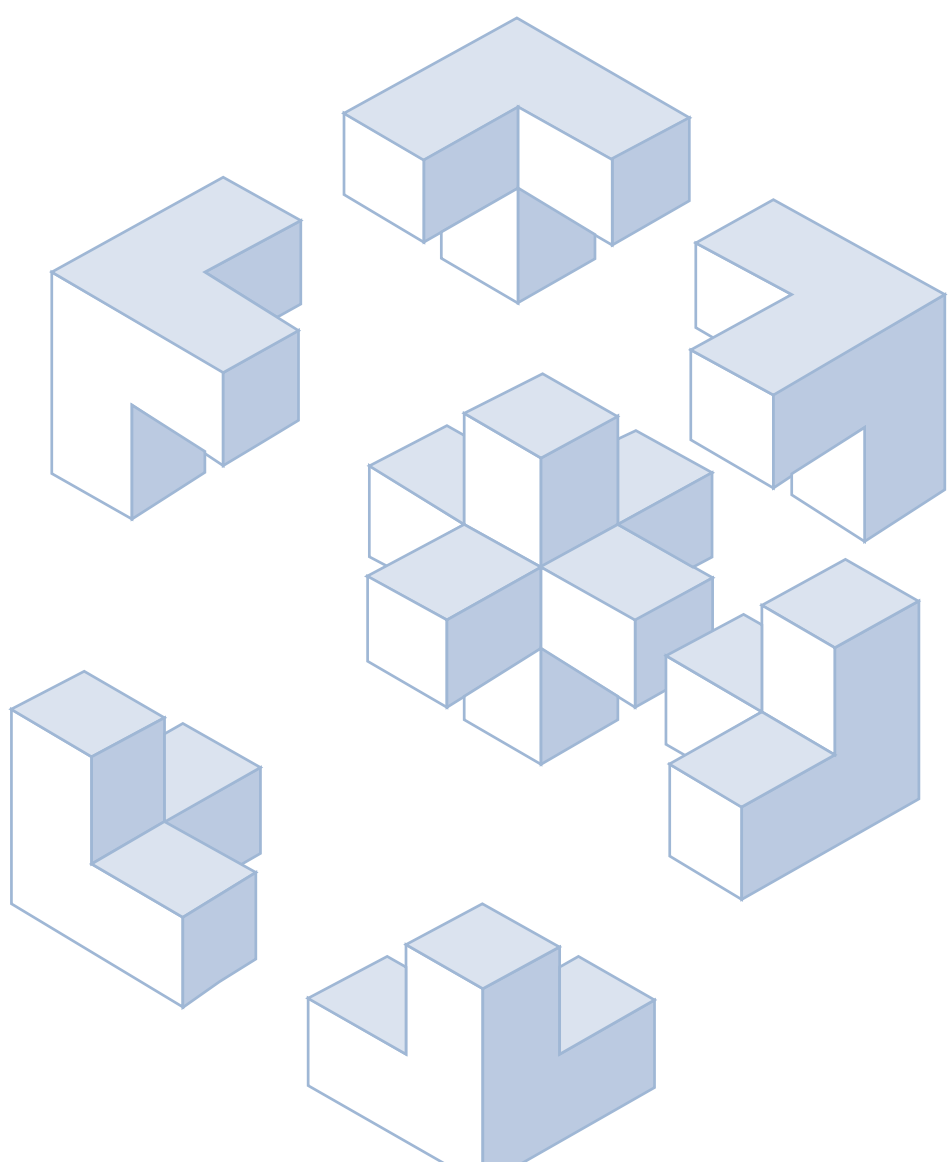
Компјутерске апликације које допуњују наш приручник са материјалима за вежбе у дигиталном решавању проблема се могу преузети на интернет адреси са следеће стране: <http://vismath.ektf.hu/exercisebook>

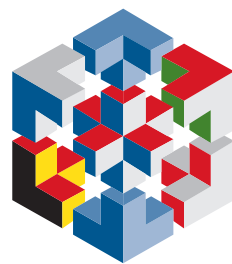
5 Захвалност

Захваљујемо представницима осам партнерских институција, које су учествовале у Темпус пројекту, на њиховом конструктивном раду. Пуно захвалности дугујемо и колегама са Метрополитан Универзитета, из Високе ИСТ Школе, са Универзитета примењених уметности у Бечу, Универзитета Јуваскула, Универзитета у Новом Саду, са Математичког Института у Београду, из Синт-Лукас Архитектонског факултета и колегама из конзорцијумског лидера, Естерхазу Кароли Колеца из Мађарске.

⁷ Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013), Conceptualising inquiry based education in mathematics, ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 45(6). 901-909.

⁸ Fenyvesi, K. (2012) The Experience Workshop MathArt Movement: Experience-centered Education of Mathematics through Arts, Sciences and Playful Activities, Proceedings of Bridges 2012 World Conference. Baltimore: Towson UP, 239-246.





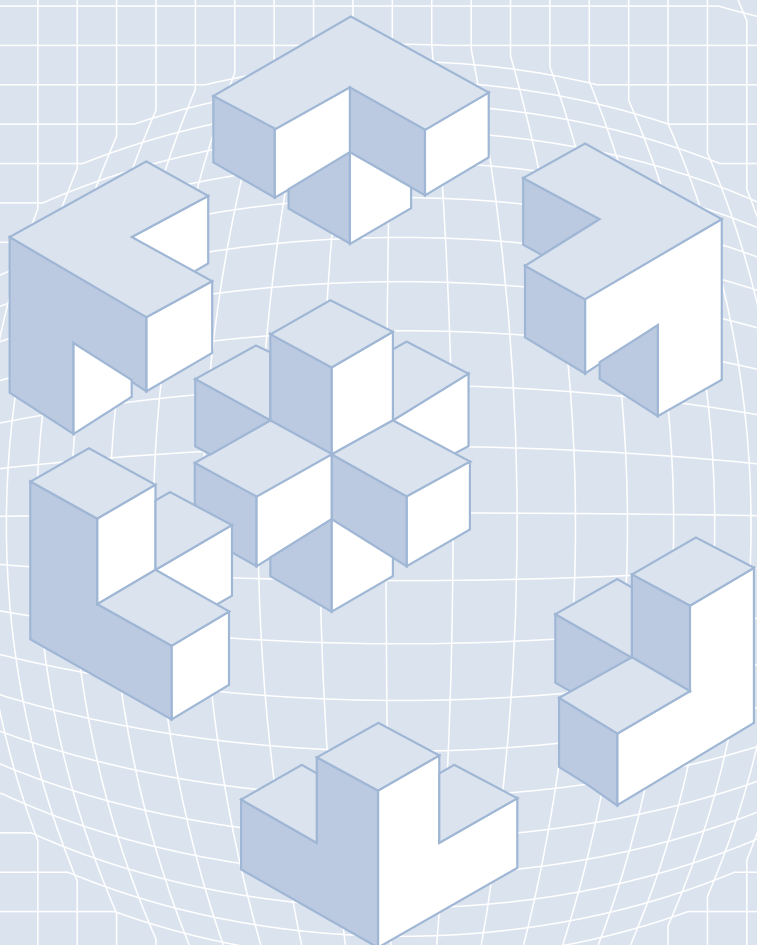
VISUALITY &
MATHEMATICS

EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

Славик В. Јаблан
Љиљана Радовић:

Шаблони, Симетрије, Модуларност и Игре са плочицама

ЗАГОНЕТНЕ СИМЕТРИЈЕ





СЛАВИК В. ЈАБЛАН (рођен у Сарајеву 10. јуна 1952) дипломирао математику на Универзитету у Београду (1971), где је магистрирао (1981) и докторирао (1984). Усавршавао се на постдокторским студијама у Кишињову (Молдавија 1985), САД и Канади (1990). Добитник је Фулбрајтове стипендије 2003/04. Објавио је неколико монографија: *Symmetry, Ornament and Modularity*, World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, 2002; *LinKnot – Knot theory by computer*, World Scientific, Singapore, 2007 као и webMathematica књигу *Linknot* (<http://math.ict.edu.rs/>) и више од 70 научних радова из области теорије чворова, теорије симетрије и орнамената, антисиметрије, колорне симетрије и етноматематике. Учесник је великог броја међународних конференција (Bridges, ISIS Symmetry Congresses, Gathering for Gardner, конференција о математичкој кристалографији и теорији чворова). Коаутор је курса Визуелна математика на БМУ (Београд). Коедитор је електронског часописа VisMath (<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/>). Као сликар и математички уметник имао је више од 15 изложби и добитник је награде на Мађународном такмичењу за индустријски дизајн и нове технологије CEVISAMA '87 (Валенсија, Шпанија).



ЉИЉАНА М. РАДОВИЋ (рођена у Нишу, Србија, 28. октобра 1969.) дипломирала математику на Универзитету у Нишу (1993), где је такође и магистрала (2000) и докторирала (2004) под менторством професора Славику Јаблана. Ради у звању ванредног професора на Универзитету у Нишу. Аутор и коаутор више од 30 научних радова из области теорије симетрије и орнамената, колорне симетрије и антисиметрије, етноматематике као и теорије чворова. Учествовала је на више међународних конференција (Bridges, ISAMA, ISIS Congress, Geometry Congresses). Учествовала је у креирању курса *Визуелна математика* на БМУ (Београд) заједно са професором Славик Јабланом. Коаутор је књиге *The Vasarely Playhouse* (Association for South-Pannon Museums, Мађарска, 2011) и коедитор књиге *Experience-centered Approach and Visuality in The Education of Mathematics and Physics* (Kaposzvar University, Мађарска, 2012). Коедитор је електронског часописа VisMath (<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/>). Учествовала је у више пројеката везаних за геометрију, визуелизацију и едукацију.

Шаблони и симетрија

Шаблон (шема, образац, енгл. *pattern*) представља одређену правилност која се може уочити у природи или људским творевинама, где се елементи (шема) понављају на неки предвидљиви начин. Обрасце можемо да разликујемо и класификујемо у односу на тип правилности које се у њима користе, али такође и према степену слободе.

Најчешћи примери образаца почивају на симетрији: коришћењу геометријских правила базираних на понављању. Симетрију у природи можемо наћи свуда око нас, тако да се може рећи да “природа воли шаблоне”. Разлог за то лежи у универзалном принципу економије у природи: један елемент (на пример, плочица) се периодично понавља, дајући као резултат неки орнамент (лат. *Ornamentum* – украс), који је један од најстаријих и основних декоративних елемената у ликовним уметностима. Од памтивека, уметници и занатлије различитих епоха, култура и цивилизација користили су понављање и комбиновање мотива при креирању и конструкцији разних украсних мотива на костима, текстилу, керамици, сликама, накиту итд. Током целокупног историјског развоја човечанства, постојале су нераскидиве везе између геометрије и уметности, при чему је визуелно приказивање често служило као основ за геометријско разматрање. Ово се поготово односи на орнаментално сликарство (орнаментику), коју Х. Вејл (H. Weyl)¹ назива “најстаријим видом више математике израженим у имплицитној форми”. Међутим, релативно независан развој геометрије и сликарства резултирао је формирањем два различита језика који користе сасвим различите термине за описивање симетричних форми. Током XX века, динамичан напредак математичке теорије симетрије довео је до тога да је први значајнији подстицај за проучавање орнаменталне уметности потекао од математичара. У додатку своје монографије о бесконачним групама А. Шпаизер (A. Speiser)² је предложио да се орнаменти древних култура (попут египатских орнамената) користе као најбоља могућа илустрација група симетрије. Приступ класификацији и анализи орнамената на основу симетрија обogaћен је доприносом различитих аутора (А. Милер (A. Müller), А.О. Шепард (A.O. Shepard), Н.В. Бјелов (N.V. Belov), Д. Вашбурн (D. Washburn), Д. Кроу (D. Crowe), Б. Гринбаум (B. Grünbaum)). У њиховим радовима описни језик замењен је геометријско-кристалографском терминологијом. Приступ орнаменталној уметности, са становишта теорије симетрије, нуди могућности за дубљу студију комплетног историјског развоја орнаменталне уметности, правилности и закона на којима су базиране конструкције орнамената, као и ефикасан метод за класификацију, упоредну анализу и реконструкцију орнамената.

Основна, најједноставнија симетрија која генерише све остале симетрије јесте *осна рефлексија* (или једноставно рефлексија): слика у огледалу. Људи су, баш као и већина живих бића основно симетрични. Наша слика у огледалу је подударна са нама, али је оријентација измењена: „леви“ лик је пресликан у „десни“, при чему су сва растојања између парова тачака оригинала и слике остала очувана.

Пресликавање (или *трансформација*) свакој тачки равни придружује њену слику и обрнуто. *Изометрија* је трансформација која чува растојања између тачака.

Најједноставнији пример изометрија представља кретање неког крутог тела: ако га померите, сва растојања између парова његових тачака (као и комплетан облик) остају очувана. Кажемо да је нека фигура *инваријантна* у односу на неку трансформацију, ако остаје непромењена под дејством те трансформације. На пример, ако ротирате квадрат око његовог центра за 90° или ако га основно симетрично пресликате у односу на вертикалну или хоризонталну осу симетрије или његову дијагоналну, он се пресликава у самог себе. Таква трансформација (у овом случају ротација или осна рефлексија) зове се *симетрија* те фигуре. Концепт симетрије превазилази домен изометрија и односи се на инваријантност у односу на било коју врсту трансформација (на пример симетрију сличности, итд.).

Свака фигура (лик) има најмање једну (тривијалну) симетрију, такозвану идентичку трансформацију, која чува непокретном (инваријантном) сваку тачку фигуре. За фигуру чија је једина симетрија идентичка трансформација каже се да је асиметрична; у супротном се каже да је симетрична. На пример, велика слова А, В, С, D, Е, К, М, Т, U, V, W, Y су основно симетрична у односу на вертикалну осу. Н, I, О, X су двоструко основно симетрична (у односу на вертикалну и хоризонталну осу) и централно симетрична; N, S, Z су централно симетрична, док су F, G, J, P, Q, R асиметрична. Слова bd или pq формирају основно симетричне парове, док bq или rd представљају централно симетричне парове. На сличан начин, у низу AAAAAA можете да померите свако слово за по један корак, или за по два корака итд., и то је транслација. Минимална транслација је транслација за један корак.

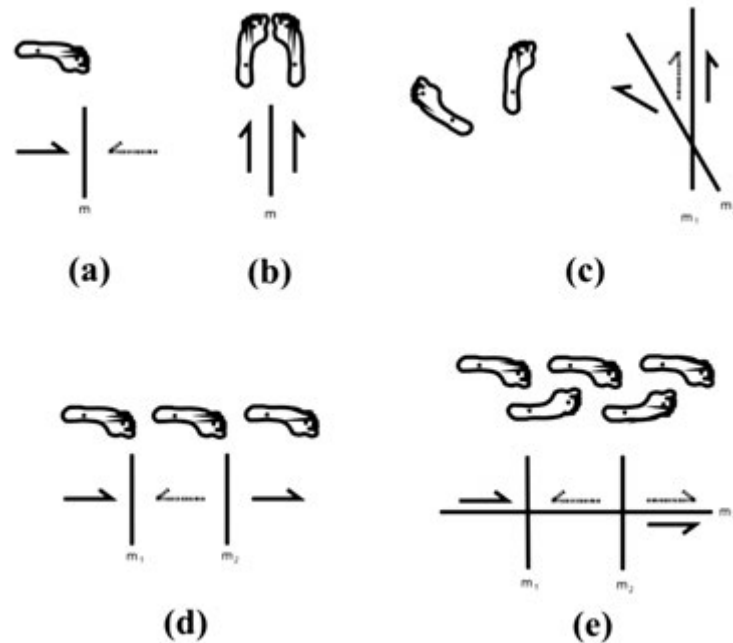
Осна рефлексија генерише све остале раванске изометрије. Свака изометрија равни може се представити као композиција највише три осне рефлексије. Пошто свака рефлексија има своју осу, проблем класификације раванских изометрија можемо свести на могуће позиције три линије у равни (осе рефлексија) и резултирајуће симетрије (слика 1). Ако су две осе рефлексија паралелне, резултујућа трансформација је *транслација* или паралелно померање. Ако се две осе рефлексија секу, као резултат композиције рефлексија добија се *ротација* око пресечне тачке оса. Композиција три рефлексије са осам које се не секу у истој тачки је *клизајућа рефлексија*.

¹ H. Weyl, Symmetry, Princeton, 1952

² A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin, 1927

Огледалска симетрија (тј. осна рефлексија) мења оријентацију сваке фигуре: “лево” оријентисану фигуру пресликава у “десно” оријентисану. Ако применимо осну рефлексију два пута или паран број пута на исту фигуру, њена оријентација остаје очувана; ако применимо осну рефлексију непаран број пута, оријентација објекта се мења, па међу раванским изометријама можемо разликовати:

1. *парне изометрије* (изометрије које чувају оријентацију): идентичку трансформацију, ротацију и транслацију (паралелно померање), композиције двеју рефлексија;
2. *непарне изометрије* (изометрије које мењају оријентацију): рефлексију и клизајућу рефлексију (“стопа у снегу”), која је композиција три рефлексије.



слика 1: Изометрије равни: (а) идентичка трансформација; (б) осна рефлексија; (ц) ротација; (д) транслација; (е) клизајућа рефлексија

Све симетрије неког објекта чине математичку структуру која се зове *група* (у нашем случају, група симетрија). Елементи групе задовољавају четири лепе особине. Прва од њих је *затвореност*: резултат композиције (сукцесивног дејства) двеју симетрија је симетрија. Друга је *асоцијативност*: свеједно је да ли након дејства (композиције) двеју трансформација симетрије следи дејство треће, или након дејства прве трансформације симетрије следи дејство (композиција) преосталих двеју. Трећа особина се односи на *постојање неутралног елемента* – тривијалне, идентичке симетрије, која све тачке фигуре оставља на месту. Четврта особина везана је за *постојање инверзне симетрије*: ако смо неку фигуру F пресликали неком симетријом у фигуру F_1 , тада и фигуру F_1 можемо пресликати инверзном трансформацијом у полазну фигуру F .

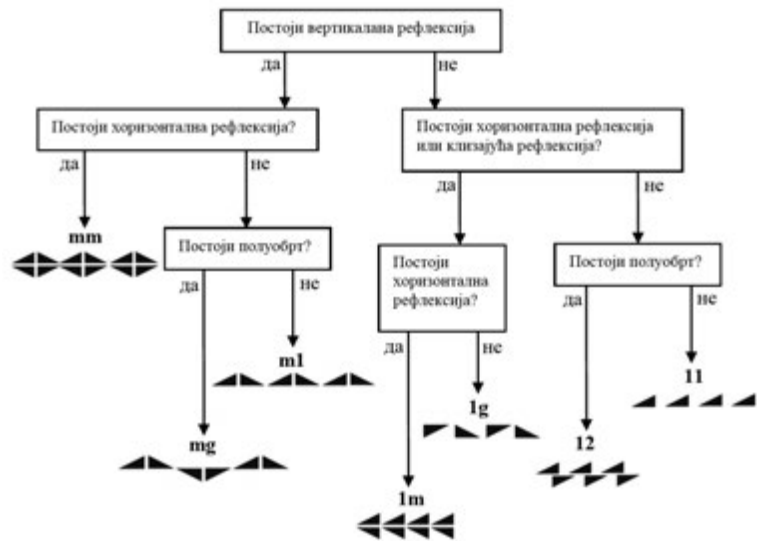
Нас интересују симетричне фигуре и орнаментални мотиви у равни који остају неизмењени након дејства нетривијалних трансформација – симетрија. У равни можемо разликовати три врсте симетричних фигура:

1. фигуре код којих под дејством симетрија остаје инваријантна (непромењена) само једна тачку фигуре (центар) – *розете* (кружне шаре)
2. мотиве без инваријантних тачака, с инваријантним правцем, осом транслације – *бордуре/фризове* (линеарне шаре)
3. мотиве без инваријантних тачака, са два инваријантна правца – *раванске орнаменте*.

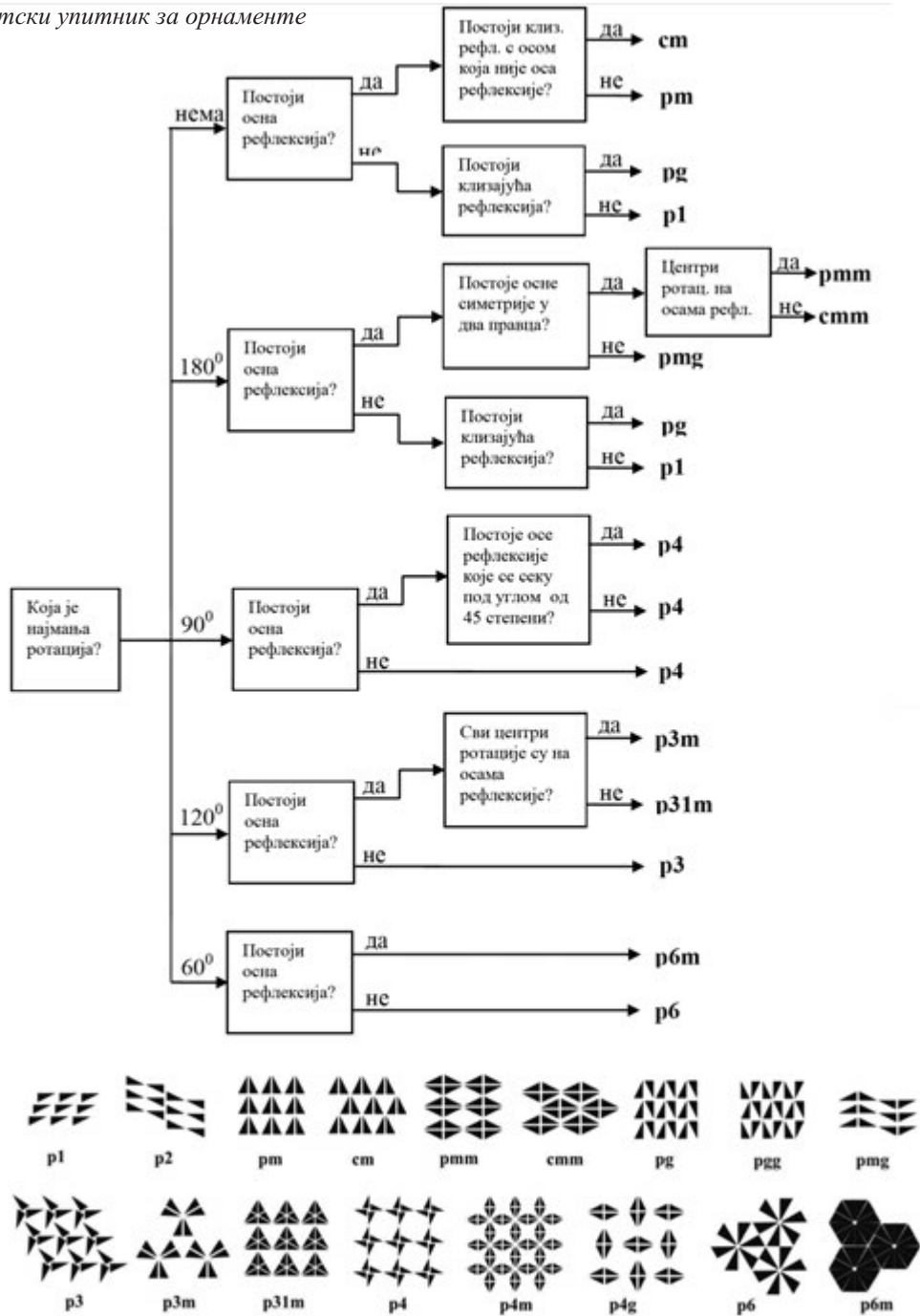
Сваком орнаменту ћемо доделити одговарајућу групу симетрија и извршити поделу розета, бордура и орнамената на (коначан) број класа, користећи као критеријум класификације њихове групе симетрија. Постоје две бесконачне класе розета: цикличне групе и диедарске групе симетрија. Свака бордура ће припадати једном од седам типова бордура, а сваки орнамент једном од седамнаест типова раванских орнамената.

За препознавање и конструкцију бордура и орнамената можемо користити дијаграме који шематски приказују симетрију њихове структуре. Као задатак можете покушати да препознате групе симетрија различитих бордура и орнамената, као и да конструишете различите симетричне шаре добијене из различитих полазних асиметричних базичних елемената.

слика 2: Шематски упитник за бордуре

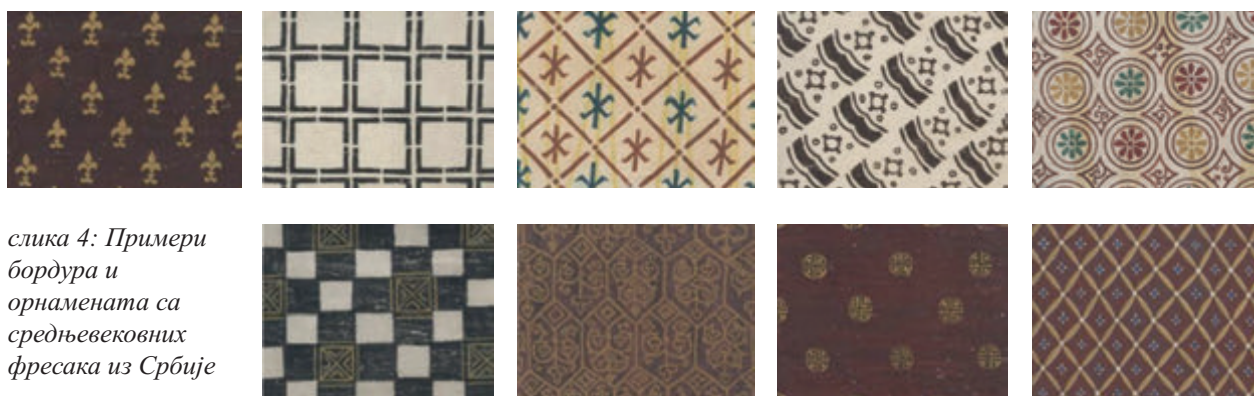


слика 3: Шематски упитник за орнаменте



1. задатак: Препознавање група симетрија

Покушајте да препознате групе симетрија бордура и раванских орнамената приказаних на слици 4 коришћењем шематских упитника.



слика 4: Примери бордура и орнамената са средњевековних фресака из Србије

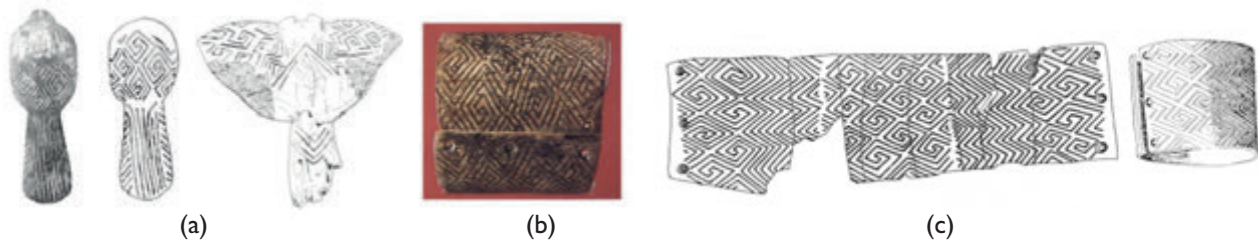
Модуларност

Као што смо већ напоменули, коришћење симетрије је само најједноставнији начин да се креирају шаре које, захваљујући периодичности, пружају најнижи степен слободе и сложености. Следећа могућност за испољавање принципа економичност у природи је *рекомбинација*. Једна од њених манифестација је принцип *модуларности*: могућност да се креирају разноврсне и променљиве структуре, које потичу од неког (коначног и ограниченог) скупа базичних елемената, њиховом променом распореда (рекомбинацијом), при чему из минималног броја полазних елемената (модула) конструишемо максималан број могућности. У оваквим конструкцијама је најбоље користити једнак број различитих модула. Научници су одувек трагали за основним градивним блоковима природе (у физици, хемији, биологији и осталим наукама). У Платоновом филозофској расправи „Тимеус“, (написаној у стилу Сократовског дијалога), четири базична елемента у природи: земља, ватра, ваздух и вода су идентификована са правилним полиедрима: коцком, октаедром, икосаедром и тетраедром, док пети правилни полиедар, додекаедар, представља Универзум. У физици, почевши од атома, субатомских честица, или елементарних енергетских ентитета, кваркова – јединица материје или енергије, научници покушавају да објасне природу помоћу модуларности. Слична тенденција се појављује у уметности, архитектури и дизајну (посебно орнаменталном).

Овде ћемо илустровати неке примере модуларности, дизајниране као врсту модуларних игара и њихову потенцијалну примену у математичком образовању. Такође, објаснићемо њихово порекло и показати да је принцип модуларности коришћен од почетка људске историје као основа за конструкцију различитих структура.

Најстарији пример модуларности базиран на геометријским фигурама и структурама потиче из палеолитског локалитета Мезин (Украјина, 23000 год. п.н.е). Оп-елементи „Op-tiles“ представљају скуп модуларних елемената који се састоји од две правоугаоне антисиметричне плочице (позитива и негатива). Овај скуп елемената се може проширити до скупа који се састоји од пет елемената, укључујући криволинијске и једну антисиметричну плочицу. Оп-елемент базиран на том истом принципу је Трушеова плочица (енг. *Truchet tile*) – црно-бели квадрат антисиметричан у односу на дијагоналу. Помоћу ових плочица могуће је конструисати бесконачну колекцију раванских црно-белих шара, које су коришћене у уметничком правцу двадесетог века познатом као оптичка уметност („Op-art“). За такав модуларни елемент, оп-елемент – квадрат са црним и белим дијагоналним пругама и његов негатив, такође користимо и назив „Versatile“, који је предложио архитекта Бен Николсон (Ben Nicholson) који је препознао исту фамилију модуларних елемената анализирајући грчке и римске меандарске бордуре и лабиринте. Слични мотиви названи *key-patterns* (јер се уклапају попут кључа и браве) могу се конструисати од оп-елемената и производе снажне визуелне ефекте треперења и блештања, захваљујући двозначности која се јавља као последица подударности „фигуре“ (црни део) и „позадине“ (бели део) оваквих мотива у моменту када наше око (и визуелна спознаја) осцилује између два једнако могућа тумачења. Оваква врста визуелних ефеката је обилато коришћена у „Op-art“-у, где се користе визуелни ефекти засновани на двозначности или вишезначности различитих геометријских форми, комплементарности боја и визуелним илузијама.

Погледајмо како се могао развијати креативни процес дизајнирања оваквих орнамената. Замислимо модерног инжењера који започиње конструктивни процес. Он прво прави грубу скицу, а потом креће да озбиљније ради на решавању проблема. Следећи низ орнамената из Мезина је много напреднији. На слици 5а видимо ремек дело палеолитске уметности – птицу из Мезина украшену меандарским орнаментом. Преисторијски човек је применио правила симетријске конструкције која је научио и сачувао их је на овај начин за потомство. На кости мамута, моделираној у облику птице, он је угравирао меандарску шару која представља најстарији пример праволинијске спирале у облику меандарске орнаментике.

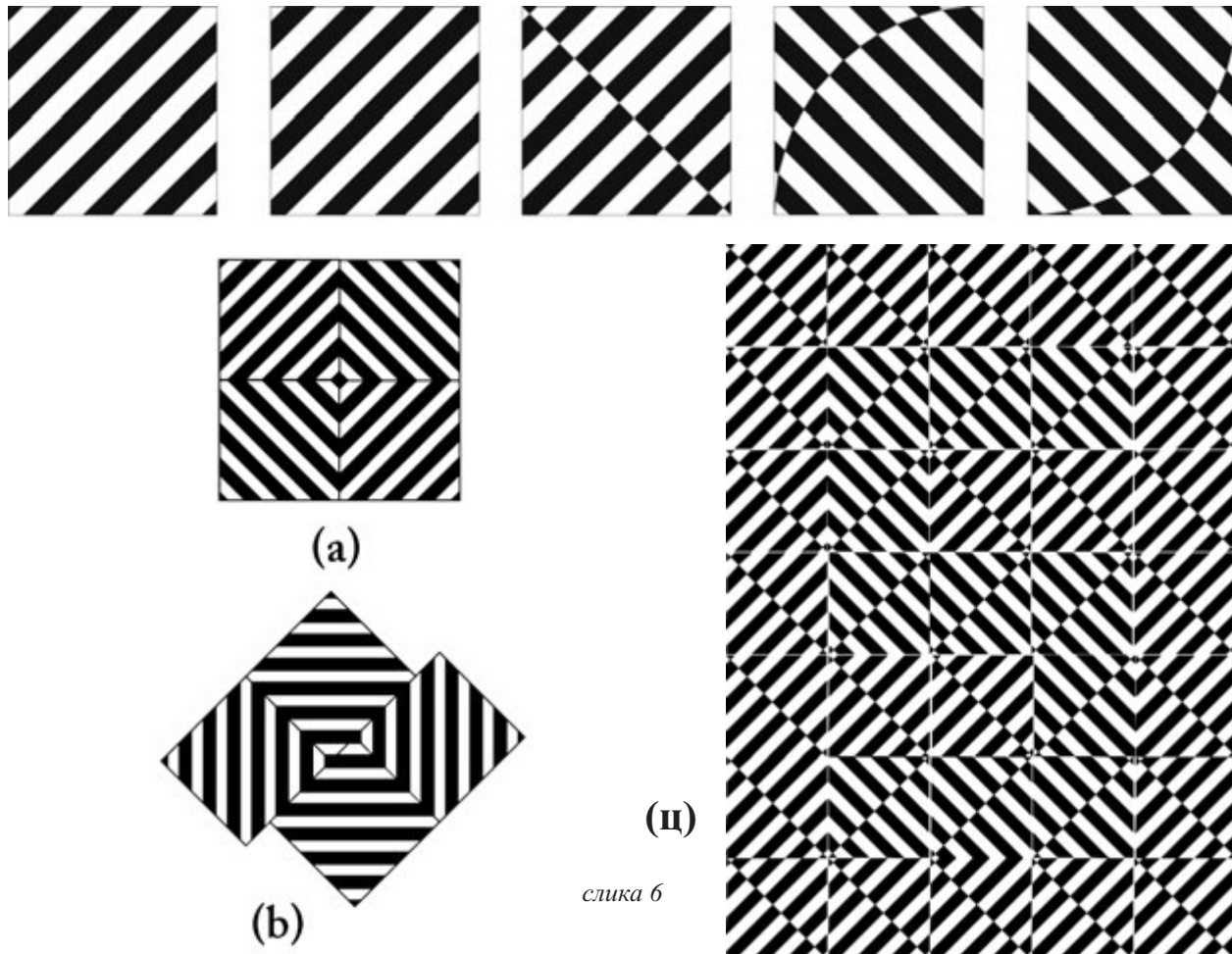


слика 5: (а) Птица из Мезина; (б) наруквица из Мезина; (ц) размотана наруквица

За цртање оп-елемената и сличних модуларних елемената, данас се могу користити различити графички програми. Неки од тих компјутерских програма за цртање су бесплатни и могу се преузети са Интернета, док ће вам за друге требати лиценца. Са Интернет адресе <http://www.inkscape.org/> можете преузети бесплатан програм **Inkscape**, који се може користити као поједностављена замена за програм **Corel Draw**. Међутим, ако имате лиценцирану верзију **Corel Draw**-а или **Adobe Illustrator**-а, све илустрације можете цртати у њима. Након штампања елемената на провидним фолијама можете направити различите 3D структуре, сличне онима које је креирао Виктор Вазарели (Victor Vasarely) или правити игре са Оп-елементима.

2. задатак: Слагалица од оп-елемената

Помоћу оп-елемената направите свој оригинални дизајн. Наравно, елементе можете једноставно ређати један до другог стављајући ивицу уз ивицу (слика 6а), али се много интересантнији ефекти могу добити паралелним померањем елемената (слика 6б). Завршен дизајн залепите на папир. Такође, од оп-елемената можете конструисати „Оп-слова” (слика. 6ц)

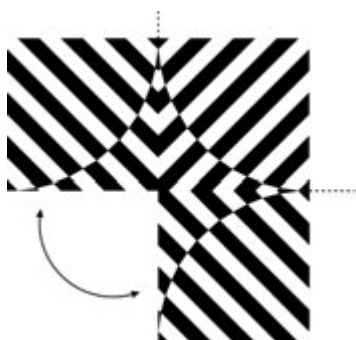


слика 6

3. задатак: Провидни оп-елементи

- 1, Савијте ивице означене испрекиданим линијама (слика 7г) и залепите преостале две ивице користећи самолепљиву траку.
- 2, Од добијених делова направите “Оп-коцку” (слика 8).

слика 7



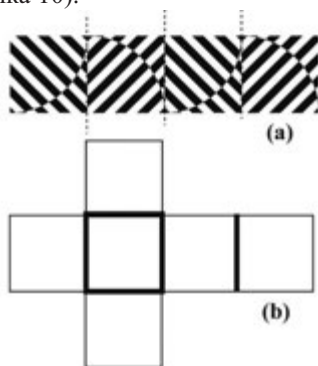
слика 8



4. задатак: Хиперкоцка састављена од оп-елемената

- 1, Савијте ивице означене испрекиданим линијама и залепите две наспрамне ивице (слика 9а).
- 2, Спојите самолепљивом траком добијених 6 делова лепећи међу собом горње ивице означене подебљаним линијама (слика 9б).
- 3, Направите хиперкоцку од структуре коју сте добили под 2) лепећи одговарајуће унутрашње ивице самолепљивом траком (није неопходно да комплетно залепите ивице, довољно је да фиксирате њихове средње делове, слика 10).

слика 9



слика10



Цртеже потребне за штампање провидних оп-коцки, хиперкоцке и слагалица од оп-елементе можете преузети са адресе: <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/TileGames.zip>

Лабиринти



Реч „лабиринт“ је изведена из латинске речи *labris*, која означава двострану секиру (хелебарду), мотив који се односи на Миносову палату из Кнососа (Крит, Грчка). Зидови ове палате су били декорисани овим орнаментима, док је унутрашњост палате украшена бронзаним двоструким секирама. То је порекло речи „лабиринт“ и чувене легенде о Тезеју, Аријадни и Минотауру. Критски лабиринт је приказан на сребрном новчићу са Кнососа (400 год. п.н.е., слика 11а). Како се може конструисати једносмерни лабиринт? На слици 11 приказан је најелегантнији начин: нацртајте црни меандар (слика 11б), исеците и уклоните неколико правоугаоника или квадрата, ротирајте сваки од њих око његовог центра за угао од 90° и ставите га назад да добијете лабиринт (слика 11ц). Чак и веома сложени лабиринти могу да се конструишу на овај начин (слика 12).



(а)

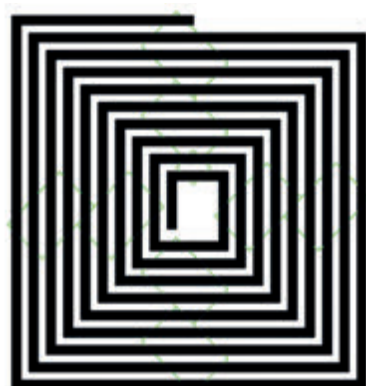


(б)



(ц)

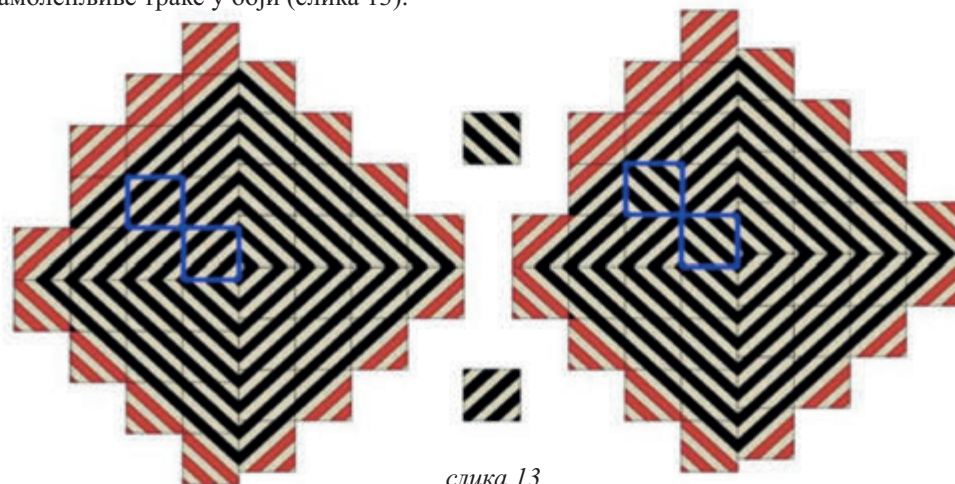
слика 11: (а) Сребрни новчић из Кнососа са сликом лабиринта; (б) меандар који се може саставити помоћу оп-елемената; (ц) његова трансформација у лабиринт



слика 12: Конструкција сложенијих лабирината

6. задатак: Изложба лабирината

За изложбе на већем простору можете направити лабиринт помоћу квадратних Оп-елемената већих димензија и широке самолепљиве траке у боји (слика 13).



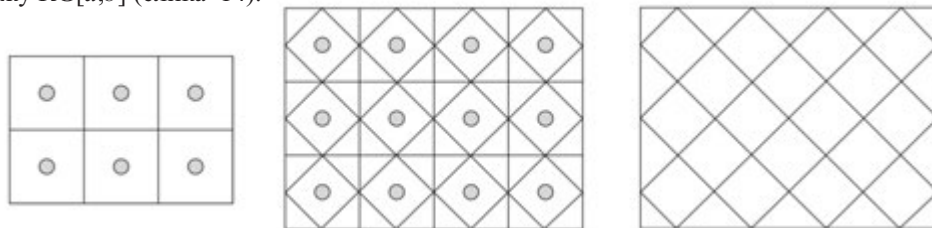
слика 13

Огледалске криве, келтски чворови и “Преплетни елементи”

Огледалске криве настале су из основних технологија: корпарства, плетења и макрамеа. Јављају се у уметности различитих култура (као келтски чворови, тамилски дизајни у предворју кућа, Сона цртежи у песку), као и у радовима Леонарда да Винчија (Leonardo Da Vinci) и Албрехта Дирера (Albrecht Dürer). Паулус Гердеш (Paulus Gerdes) је уочио њихову дубоку везу са математичким алгоритамски заснованим структурама: мозаицима чворова, Лунда матрицама, кривама без самопресека и ћелијским аутоматима.

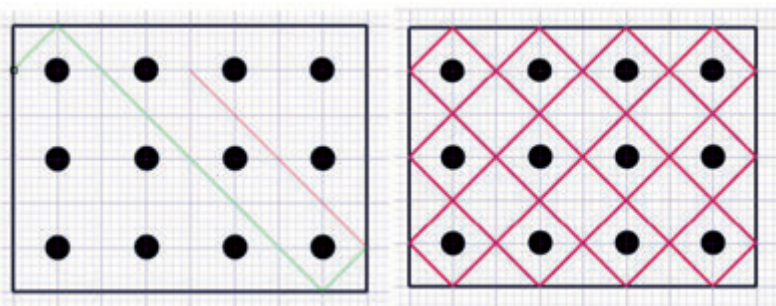
Огледалске криве се могу користити за конструкцију келтских чворова. Келтски чворови су један од врхунаца уметности приказивања чворова. Неки историчари уметности сматрају да су повод за настанак келтских чворова били слични цртежи чворова који се јављају у оквиру источњачких мозаика из 10. и 11. века, посебно персијски преплетни орнаменти. На самом почетку огледалске криве су вероватно настале из правоугаоних преплета у облику плоча, које антиквар Џ. Ромили Ален (J. Romilly Allen) који је свој двадесетогодишњи рад на келтској орнаментици сумирао у књизи “Келтска уметност из паганских и хришћанских времена” (“Celtic Art in Pagan and Cristian Times”) такође наводи као повод за настанак келтских преплетних орнамената.

Огледалске криве су путање (имагинарних) зрака светлости емитованих из средишта ивица правилне правоугаоне мреже $RG[a,b]$ са основицама a и b . У овој мрежи налазе се једнострана огледала на спољашњим ивицама и двострана огледала смештена између ћелија, која се поклапају са унутрашњим ивицама (границама ћелија) или су ортогонална на њима у тачкама средишта ивица. Након низа одбијања, зрак светлости даје затворену путању – компоненту огледалске криве. Ако је цела мрежа $RG[a,b]$ прекривена само једном компонентом, имамо савршени (једнолинијски) Сона цртеж. Ако не, након затварања једне компоненте емитујемо нови зрак светлости који полази из неке друге почетне тачке и настављамо са таквим поступком све док цела мрежа $RG[a,b]$ не буде униформно прекривена компонентама. У каквим све мрежама можемо цртати огледалске криве? Обично користимо правилну правоугаону мрежу $RG[a,b]$, али у исте сврхе можемо користити мрежу која се састоји од једнакостраничних троуглова или правилних шестоуглова. У срединама квадрата обично цртамо црне кружиће који треба да буду окружени огледалском кривом и овај поступак проширујемо на целу мрежу $RG[a,b]$ (слика 14).



слика 14: Правоугаона мрежа са једнолинијском огледалском кривом

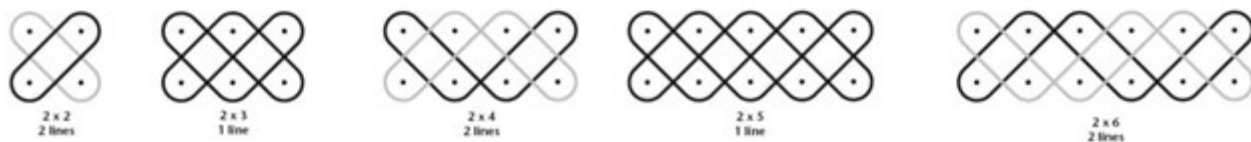
Почињемо од правоугаоне мреже $RG[a,b]$ без унутрашњих огледала. Ако је ова мрежа комплетно прекривена једном компонентом, зрак светлости емитован из средишта било које ивице ће после серије одбијања пропутovati целу мрежу и завршити свој пут у полазној тачки. У циљу поједностављења, можете поделити $RG[a,b]$ на мале квадрате, без брисања унутрашњих ивица и уклонити их када завршите свој рад. Ако су бројеви a и b узајамно прости, тј. ако је највећи заједнички делилац бројева a и b , $NZD(a,b) = 1$ (као на нашем примеру где је $a = 4$ и $b = 3$, па је $c = NZD(a,b) = 1$), добијамо једну криву која окружује све тачке (кружиће) и униформно прекрива $RG[a,b]$. У противном, добија се вишекомпонентна огледалска крива чији је број компонената $c = NZD(a,b)$. Уместо комплетног испуњавања $RG[a,b]$ кружићима можете користити систем (шему) која се састоји само од кружића, али у том случају морате водити рачуна о исправном избору правца зрака светлости, посебно када се он рефлектује у односу на огледала и мења правац (слика 15).



слика 15

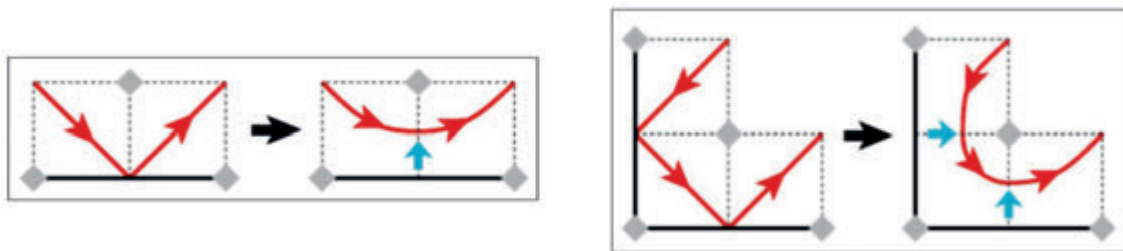
Различите ситуације могу настати зависно од димензија $RG[a,b]$, тј. вредности $NZD(a,b)$. Покушајте да докажете претходно тврђење да број компонената огледалске криве (које је корисно цртати различитим бојама да бисте их лакше разликовали) износи $c = NZD(a,b)$. На пример, за $a = 2$ и $b = 2$ број компонената је $c = NZD(2,2) = 2$,

за $a = 4$ и $b = 2$ број компонената је $c = \text{NZD}(4,2) = 2$, за $a = 5$ и $b = 2$ број компонената је $c = \text{NZD}(5,2) = 1$, за $a = 6$ и $b = 2$ број компонената је $c = \text{GCD}(6,2) = 2$, за $a = 6$ и $b = 3$ он је $c = \text{NZD}(6,3) = 3$ (слика 16), итд.



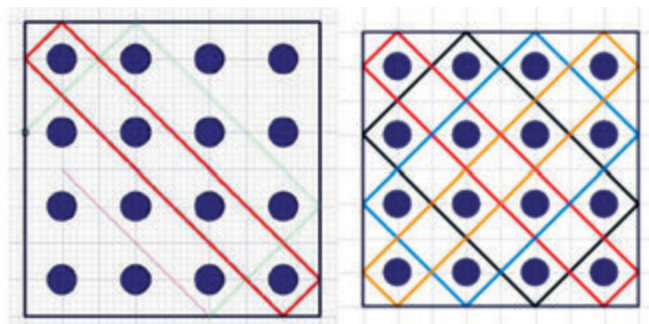
слика 16

Да бисте цртали криве са заобљеним ћошковима, при одбијању зрака светлости у односу на спољне ивице или у угловима мреже можете користити следећа правила приказана на слици 17 (ово је могуће урадити у програму *Adobe Illustrator* командом *Filter > RoundCorners* или помоћу команде *Effect > Stylize > RoundCorners*).



слика 17

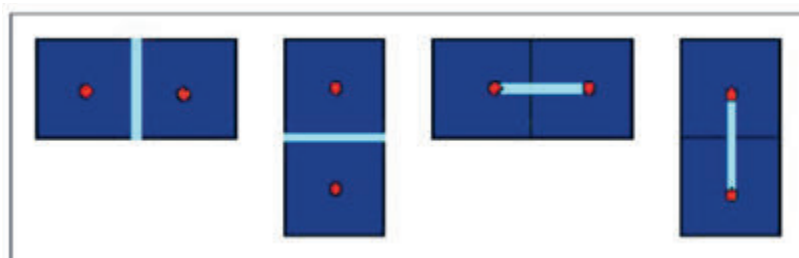
Погледајмо шта ће се десити ако бројеви a и b нису узајамно прости. Као раније, цртамо правоугаону мрежу, али сада нпр. димензија 4×4 и исцртавамо путање зрака светлости (компоненте) у њој. У циљу да заокружимо све тачке и униформно прекријемо $\text{RG}[4,4]$ огледалском кривом требаће нам четири компоненте (слика 18).



слика 18

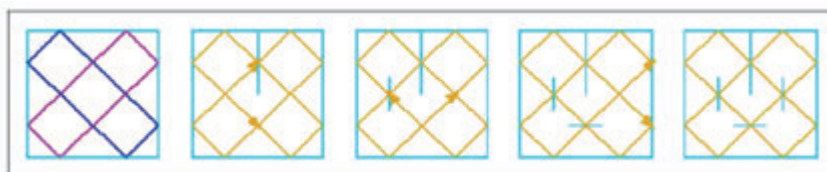
Свака огледалска крива може се претворити у преплетени дизајн уводећи однос “изнад-испод”. Следеће питање је како поставити унутрашња двострана огледала у оквиру постојеће шеме, тако да повежемо компоненте у јединствену једнолинијску огледалску криву, тј. да добијемо само један зрак светлости који је исцртава. При убацивању једног унутрашњег огледала имамо два могућа избора (слика 19):

да га поставимо између квадратних ћелија тако да се поклапа са унутрашњом ивицом;
да га поставимо управно на ту ивицу у њеном средишту.



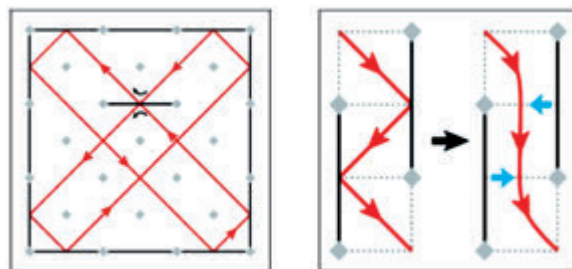
слика 19

Огледало постављено у пресеку двеју компонената (означених различитим бојама) увек ће их спојити у једну. Ако огледало поставимо у самопресеку неке оријентисане компоненте, огледало постављено између стрелица разбија ту компоненту на две; у противном, након постављања новог огледала у оваквој тачки самопресека компоненте број кривих остаје очуван (слика 20).



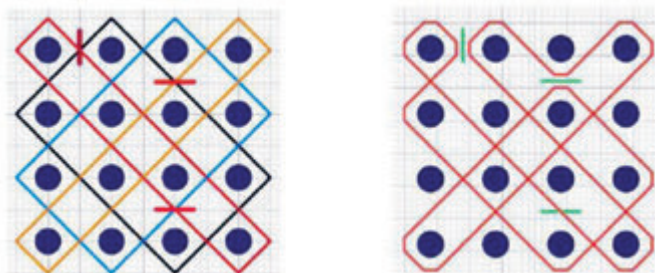
слика 20

Овај алгоритам понављамо све док не добијемо само једну криву. Након убацивања унутрашњих огледала ми можемо поновно да извршимо заобљавање делова огледалске криве који још нису заобљени (слика 21, лево). Наредна слика приказује заобљавање цик-цак линија (слика 21, десно).



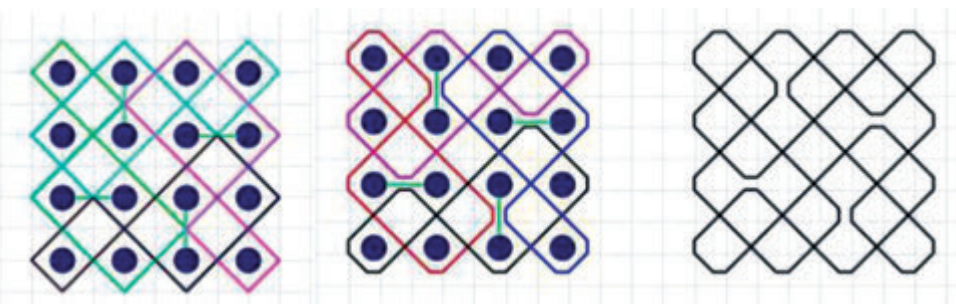
слика 21

Уочите да симетрични распореди огледала дају као резултат симетричне огледалске криве. Вратимо се на пример мреже 4×4 прекривене помоћу четири компоненте. Након постављања унутрашњег огледала у пресеку две разне компоненте (које су нацртане различитим бојама), број компонената се своди на три, јер су захваљујући постављању овог огледала две компоненте спојене у једну (након овога морате поново обојити компоненте да бисте приказали спојене компоненте једном истом бојом). Настављајући на исти начин, убацивањем нових унутрашњих огледала у тачкама пресека различитих компонената у сваком кораку број кривих се смањује за један, па након три корака добијамо само једну компоненту – једнолинијску огледалску криву која униформно прекрива $RG[4,4]$. Слика 22 приказује један од могућих начина како можете увести три унутрашња огледала тако да добијете једну криву. Наравно, решење овог проблема није једнозначно: можете направити различите распореде три (или више) унутрашњих огледала тако да сваки од њих даје једнолинијску огледалску криву.



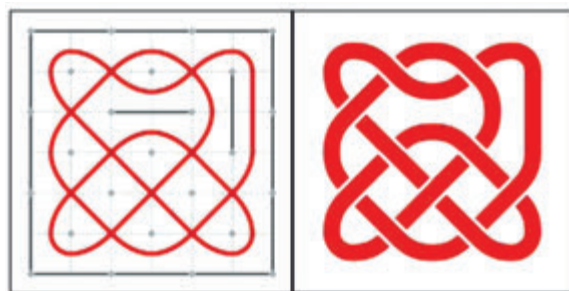
слика 22

На слици 22 огледала нису симетрична, па је и огледалска крива добијена као резултат асиметрична. Слика 23 приказује симетричан распоред четири унутрашња огледала у складу са ротацијом реда 4, па добијени цртеж поседује цикличну групу ротација C_4 . Међутим, при овој конструкцији ми нисмо комплетно испоштовали правило о упаривању компонената различитих боја, па смо добили 4-компонентну (несавршену) огледалску криву. Покушајте да извршите другачији симетричан распоред унутрашњих огледала у истој мрежи 4×4 који даје савршену (једнолинијску) огледалску криву.



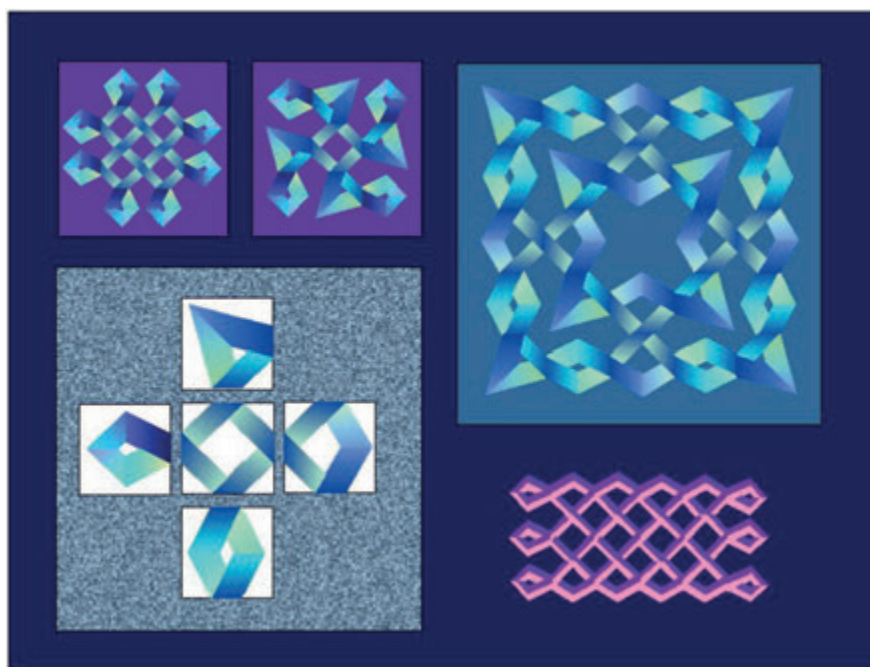
слика 23: Симетричан распоред унутрашњих двостраних огледала

Слика 24 илуструје исту вежбу у оквиру мреже 3×3 . На почетку имамо 3 компоненте, па је неопходно да убацимо бар 2 унутрашња огледала да бисмо добили једну криву. Користећи два унутрашња огледала постављена симетрично добијамо леви цртеж. Десни део слике 24 приказује исту криву претворену у дијаграм (пројекцију) алтернирајућег чвора, тако што је у сваком пресеку уведена релација “изнад-испод” која поштује алтернирање. Много сличних примера можете наћи у књигама које описују орнаментику келтских чворова или у оквиру рачунарских програма за цртање келтских чворова.



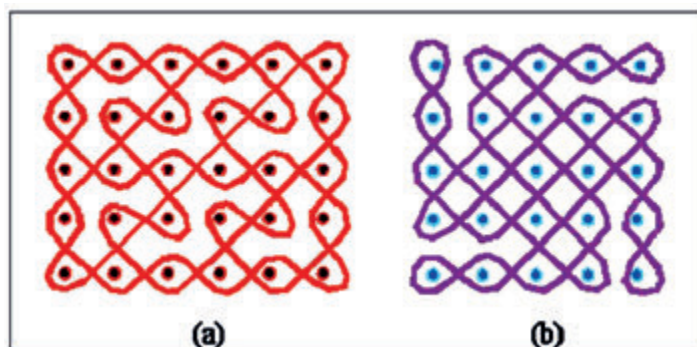
слика 24: Огледалска крива
и одговарајући чвор

Да бисмо добили преплетне орнаменте са чворовима (огледалске криве сличне келтским чворовима) можете користити свих 5 елемената (5 модула) који су приказани на слици 25. Ови елементи ("KnotTiles") представљају сва могућа "стања" појединачног малог квадрата у погледу дела огледалске криве који садржи, у смислу различитих начина његовог уклапања са суседним елементима и у односу на релацију "изнад-испод". (Ре)комбиновањем ових елемената можете добити све могуће огледалске криве (или преплетне мозаике). Интернет игру засновану на овим елементима можете наћи на адреси <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/op/tiles/kt/kt.htm>



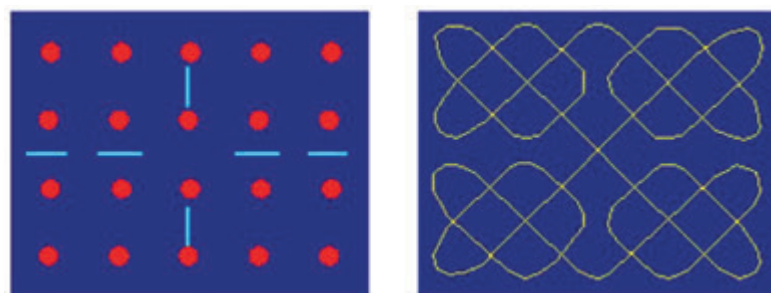
слика 25

Размотрите могућност да убаците унутрашња огледала у правилну правоугаону мрежу у којој недостају унутрашња огледала, али која је већ униформно прекривена једном огледалском кривом, тј. у мрежу за коју је $c = \text{NZD}(a,b) = 1$, чије су стране мреже узајамно прости бројеви. Можемо покушати да унапред планирамо положаје огледала која ћемо увести тако да бисмо добили интересантније и визуелно привлачне огледалске криве. У многим случајевима то можемо постићи користећи симетрију (транслаторно понављање, ротациону симетрију или било коју другу). Након извесног експериментисања можете добити огледалске криве сличне онима које су креирали припадници племена Чокве (слика 26) из мрежа димензија 6×5 (које су на почетку садржале једну компоненту) и мрежа димензија 5×5 (које су на почетку садржале 5 компонената).



слика 26

Слика 27 приказује мрежу 5×4 која на почетку садржи једнокомпонентну огледалску криву и у коју желимо да додамо унутрашња огледала. Након неколико корака, уводећи 6 унутрашњих огледала на одговарајућим (симетричним) позицијама, келтски уметници су још једном успели да добију једнолинијску (савршену) огледалску криву.



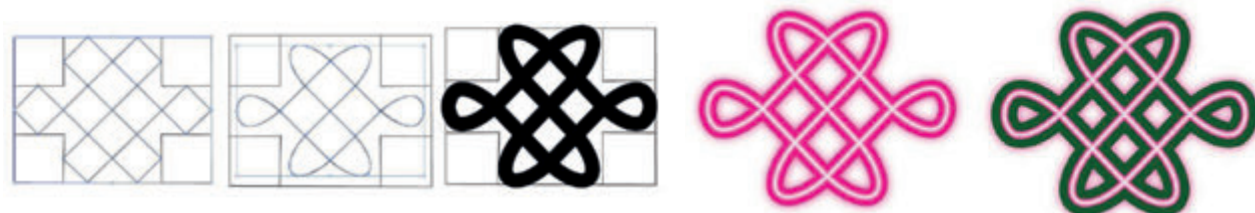
слика 27

Слика 28 приказује примере келтских чворова са омота књиге “Келтска уметност – методи конструкције” (“Celtic Art – the Methods of Construction”, Dower, New York, 1973) чији је аутор Џ. Беин (G. Bain). Све келтске чворове можемо (ре)конструисати полазећи од равanske мреже (дела равanskог прекривања – поплочавања, чији је најпростији случај квадратне мреже), постављајући унутрашња огледала у овакав део мреже и уводећи однос “изнад-испод” (преплитање) у сваком пресеку огледалске криве.



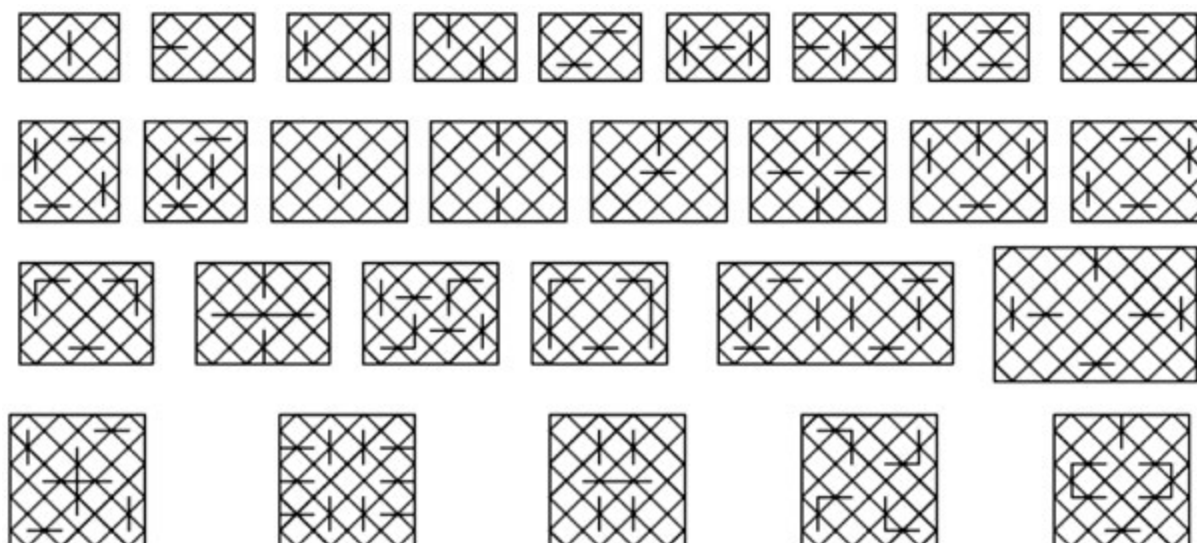
слика 28

Следећи чвор (слика 29) је нацртан у *Adobe Illustrator*-у. Полазећи од мреже 4×3 , уводимо осам унутрашњих огледала и креирамо огледалску криву нацртану помоћу 20pt линије уз коришћење неонских ефеката. Зар то није једноставно?



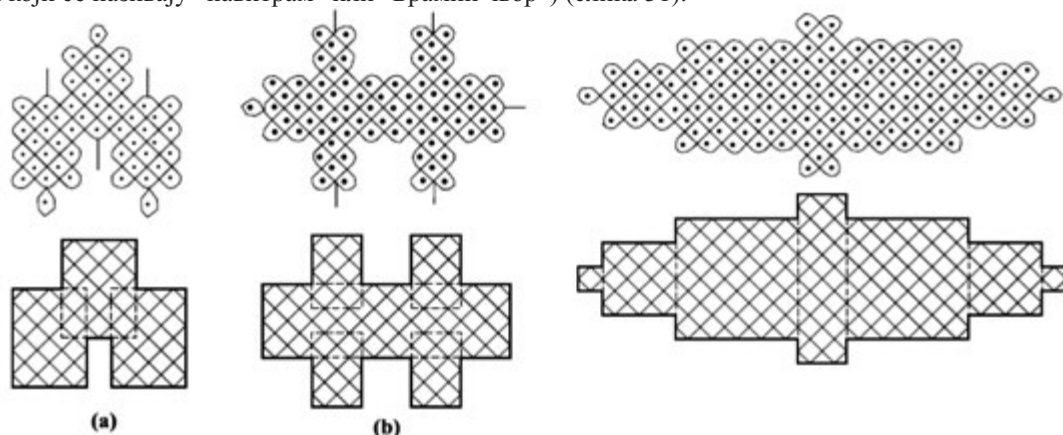
слика 29

На слици 30 приказане су различити распореди огледала, тј. одговарајуће шеме. Можемо их користити да бисмо креирали келтске неонске чворове на исти начин као што смо конструисали чворове на слици 29.



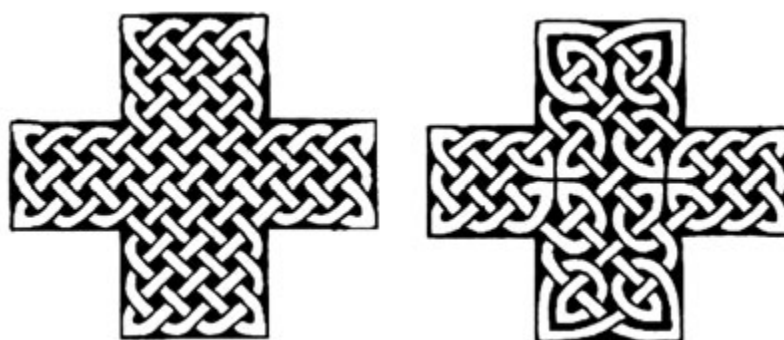
слика 30

Такође је могуће комбиновати неколико правоугаоних шема, обогатити наше цртеже огледалских кривих и добити као резултат преплетне бордуре или знатно компликованије орнаменталне чворове. Комбиновањем, спајањем и преклапањем делова основних правоугаоних мрежа добијамо сложеније огледалске криве (Сона цртеже животиња које су у песку цртали припадници племена Чокве или једнолинијске Тамилске цртеже на предворју кућа који се називају “павитрам” или “Брамин чвор”) (слика 31).



слика 31

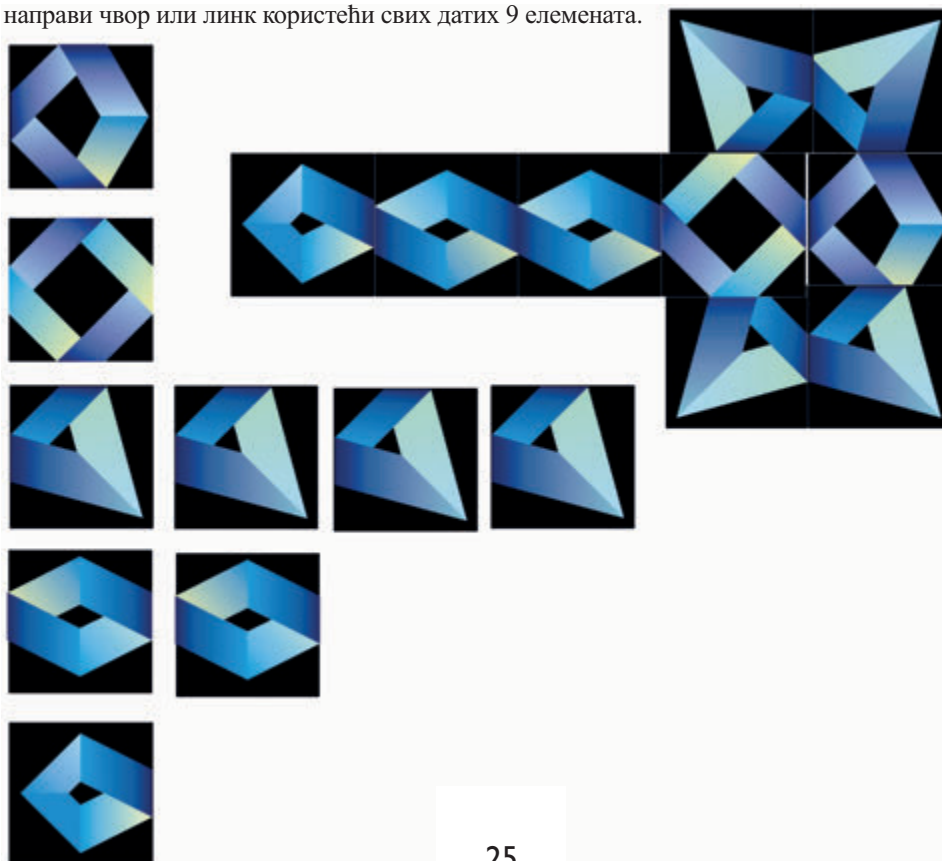
Исти приступ можемо користити да бисмо добили сложене келтске чворове (нпр. у облику крста) (слика 32)



слика 32

6. задатак: Слагалица за доошњање чворова

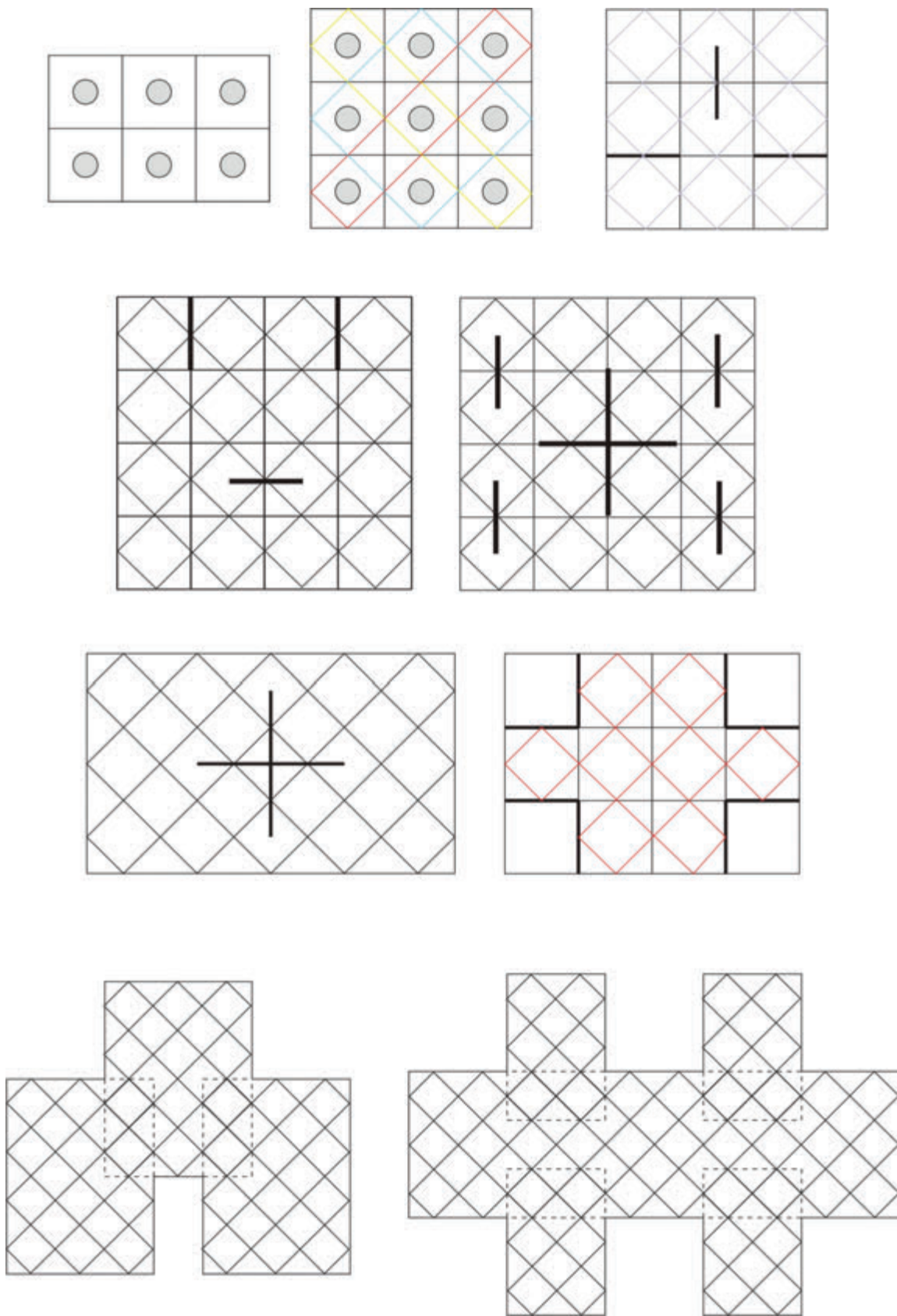
Сваки чвор или линк (вишекомпонентни чвор) можете саставити као слагалицу од наведених пет елемената. Скуп оваквих елемената називамо савршеним ако садржи бар по један елемент сваке од наведених пет врста. Циљ игре је: направи чвор или линк користећи свих датих 9 елемената.



слика 33

7. задатак: Огледалске криве и келтски чворови

Експериментишите са различитим облицима огледалских кривих (слика 34).



слика 34



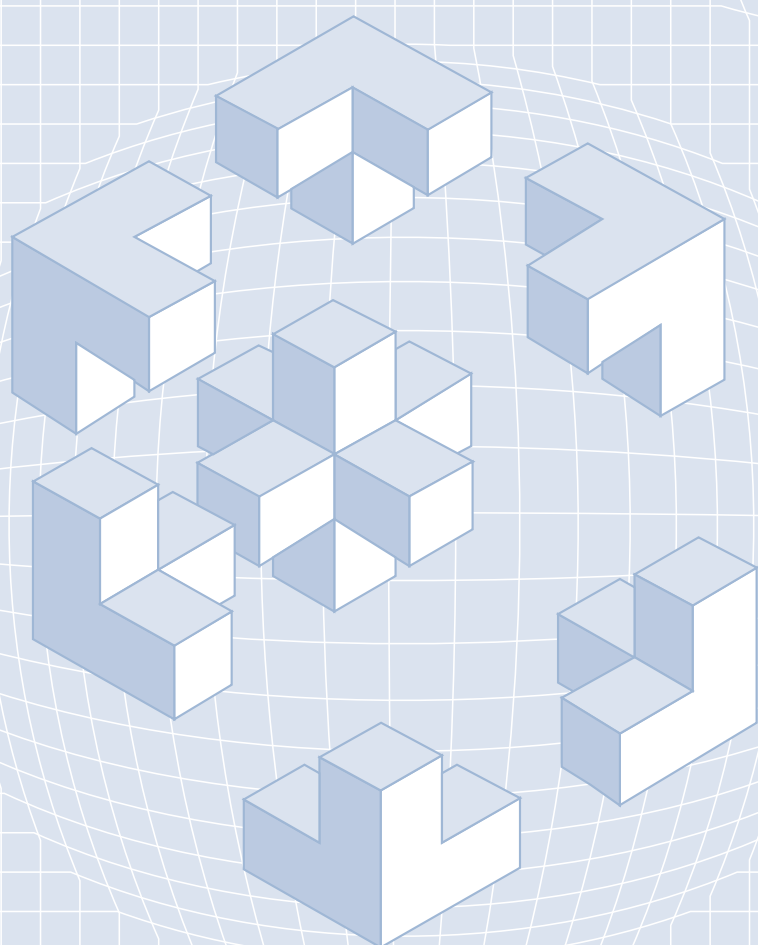
VISUALITY &
MATHEMATICS

EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

ЗАГОНЕТНЕ СИМЕТРИЈЕ

Роберт Фатхауер

Украшавање полиедара коришћењем Ешерових теселација



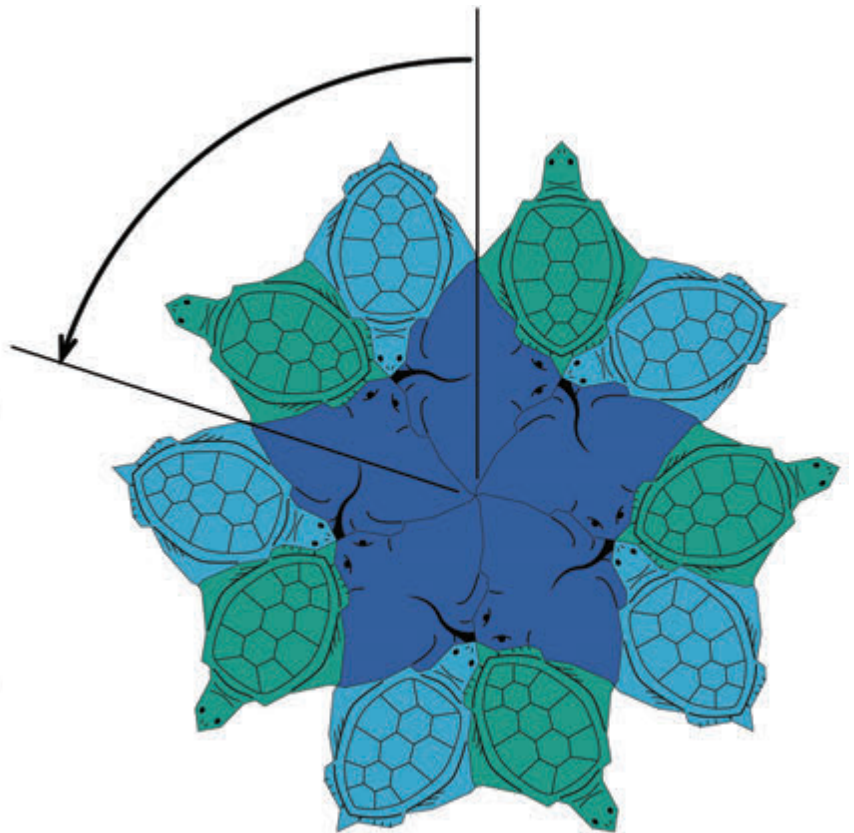
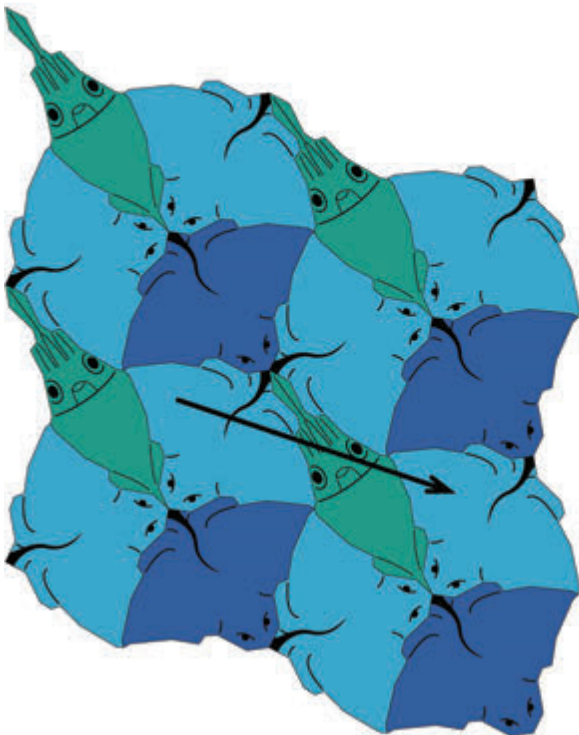


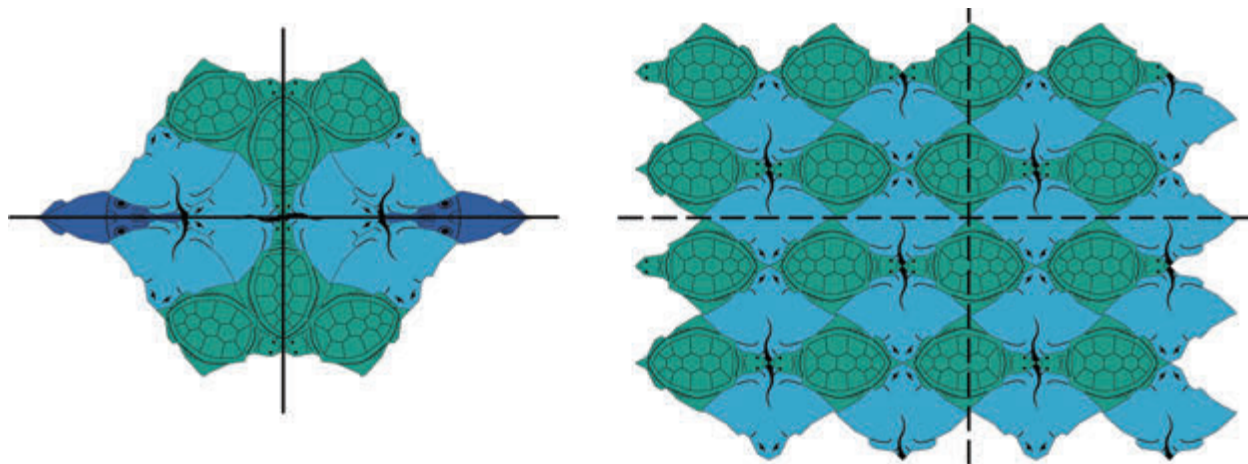
Роберт Фатхауер (Robert Fathauer) је визуелни уметник, аутор и дизајнер слагалица. Дипломирао је физику и математику на Универзитету у Денверу и докторирао на Електротехничком факултету на Универзитету Корнел. Неколико година је радио као истраживач у Лабораторији за млазни погон (*Jet Propulsion Laboratory*) у Пасадени, Калифорнија. Др Фатхауер је тренутно власник мале фирме са седиштем у Аризони под именом “Теселације” која објављује књиге, производи слагалице и друге производе које се користе у математичком образовању. Његова уметност се ослања на низ математичких идеја, укључујући теселације, фрактале, чворове, полиедри и хиперболичку геометрију. Најпознатије књиге др Фатхауера су „Пројектовање и цртање теселација“ и „Пројектовање и изградња теселираних полиедара“.

Теселације

Теселација је подела равни на плочице, које се уклапају без празнина или преклапања и прекривају раван. Постоји три врсте симетрија које се могу појавити у теселацијама равни. За теселацију се каже да поседује транслациону симетрију ако теселација може да се паралелно помери за неко растојање, у неком правцу и остане непромењена. Таква теселација је периодична или понављајућа. За такву теселацију постоји бесконачан број различитих транслација. У примеру лево испод, стрелица показује једну такву транслацију.

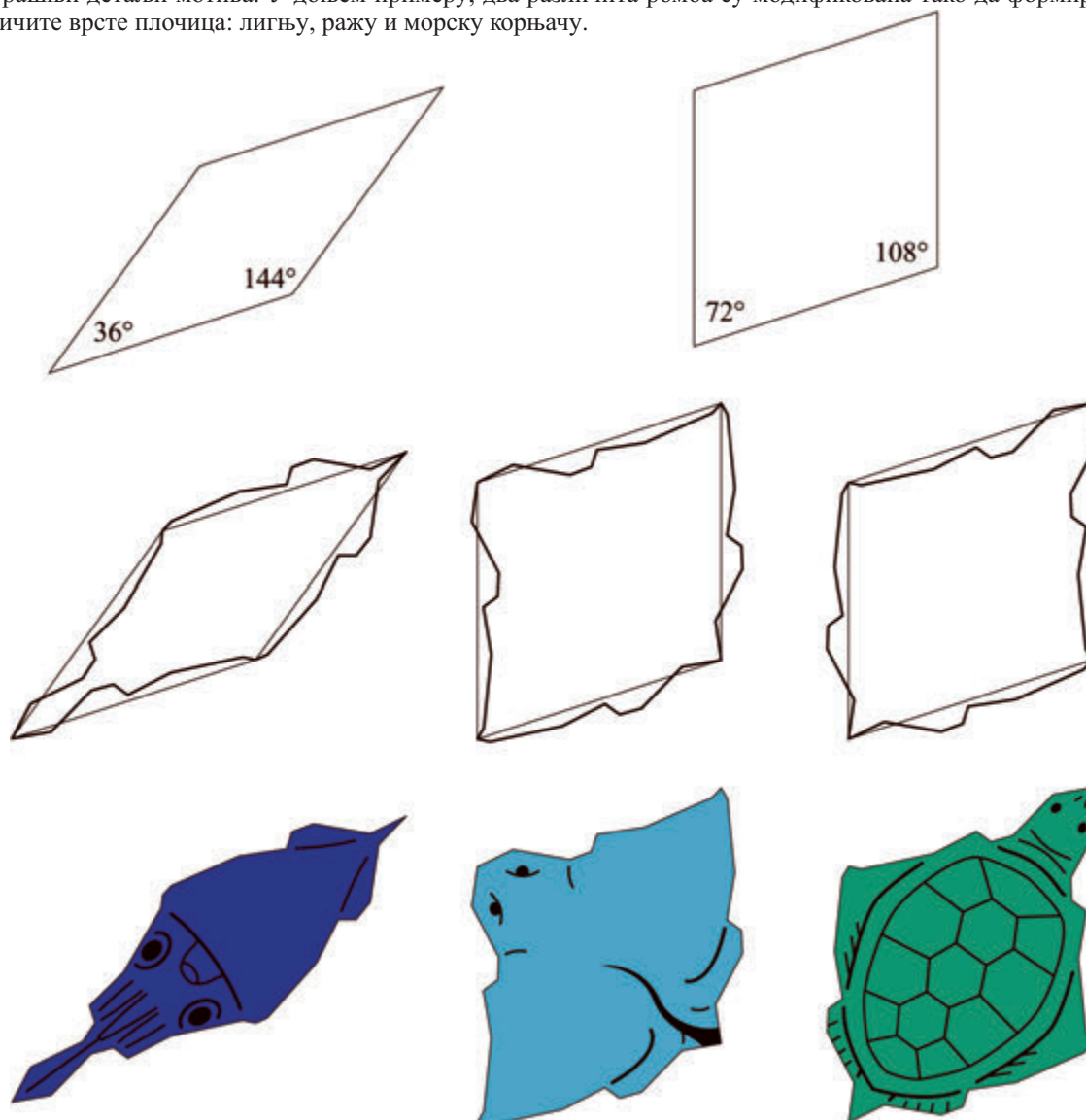
За теселацију се каже да поседује ротациону симетрију ако може да се ротира око једне тачке тако да остане непромењена. Шаблони са 2-оструком и 5-оструком ротационом симетријом се могу конструисати користећи три врсте плочица приказаних испод. Ово се односи на ротацију за 180° и 72° , или за пун обртај (360°). У примеру десно доле, стрелица показује ротацију за $1/5$ пуног обртаја око центра (угао од 72°).





За теселацију се каже да поседује клизајућу рефлексију као своју симетрију ако може да се паралелно помери за неко растојање дуж неке линије, осе транслације, а затим рефлектује у односу на ту осу транслације и при томе остаје неизмењена (инваријантна). Ако је вектор транслације нула, за теселацију се каже да поседује огледалску или рефлексиону симетрију. У примеру лево испод, пуне линије означавају осе симетрије, тј. огледала. У примеру десно испод, две испрекидане линије означавају две различите линије клизајућих рефлексија.

Холандски графички уметник М. К. Ешер (*M.C. Escher*) је био познат по стварању теселација у којима су појединачне плочице биле препознатљиви мотиви попут птица или гуштера. Ешера теселација се конструише избором једног геометријског шаблона (полигоналне равanske теселације), а затим модификовањем ивица плочица тако да се њихов облик уклопи са жељеним мотивом из природе (птицом, гуштером...). Затим се додају унутрашњи детаљи мотива. У доњем примеру, два различита ромба су модификована тако да формирају три различите врсте плочица: лигњу, ражу и морску корњачу.



Активност 1: Симетрија теселације у равни

Водич за наставнике

Материјали: Копије Радних листова 1 за ученике. Оловке у боји или фломастери за бојење у црно-белим теселацијама.

Циљ: Упознати ученике са три врсте симетрија које се могу наћи у раванским теселацијама и научити ученике како да их препознају.

Речник: теселација, транслациона симетрија, ротациона симетрија и клизајућа рефлексја.

Редослед активности:

1. Поделите радне листове. Постарајте се да ученици схвате да приказане плочице представљају делове теселације која се проширује до бесконачности.
2. Напишите појмове из речника на табли и разговарајте о значењу сваког од њих.
3. Нека ученици заврше радни лист, а затим нека размене своје одговоре за сваку теселацију.

Горња лева теселација има транслациону симетрију, као и огледалску симетрију и клизајућу рефлексју у односу на вертикалне линије.

Горња десна теселација има огледалску у односу на хоризонталне линије и вертикалне линије.

Средња лева теселација има 5-оструке ротационе симетрије у односу на центре ротација.

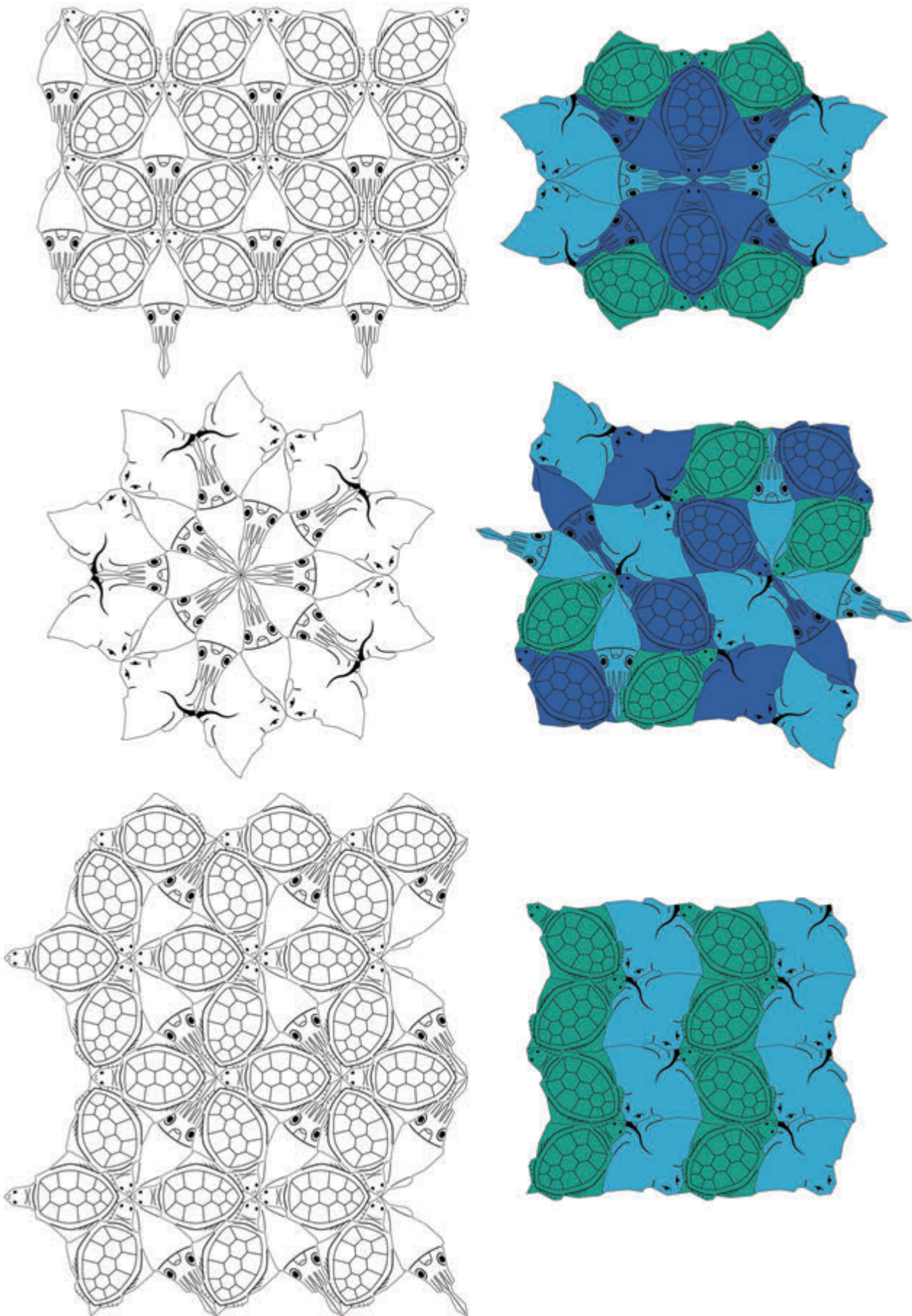
Средња десна теселација има 2-оструку ротациону симетрију у односу на центре ротација.

Доња лева теселација има и транслациону симетрију и огледалску симетрију у односу на хоризонталне осе симетрија.

Доња десна теселација има транслациону симетрију и клизајућу рефлексју у односу на вертикалне линије.

4. Ако пожелe, ученици могу да обоје црно-беле теселације..

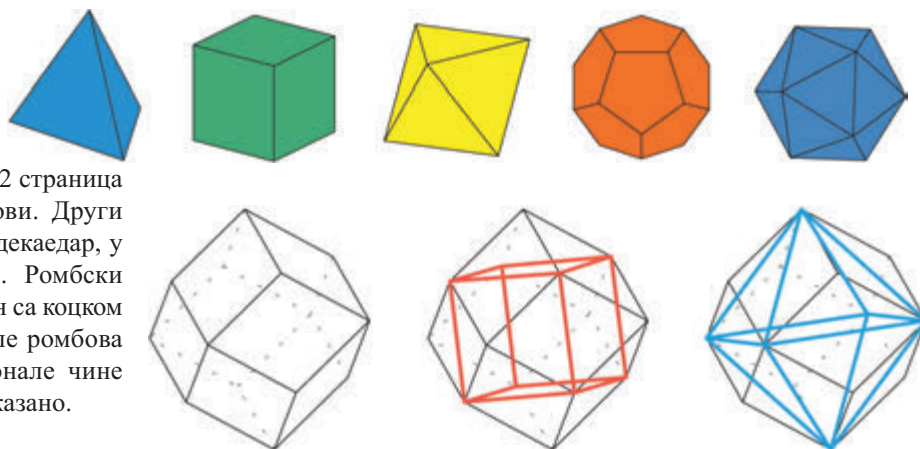
Радни лист 1. Означите сваку теселацију тако да укажете на симетрије коју поседује. Користите „Т“ за означавање трансляција, заједно са стрелицама, да укажете на растојање и правац трансляције, пуну линију да укажете на просте рефлексије, испрекидане линије да укажете на клизајуће рефлексије и велику тачку да укажете на центар ротације (или правилни многоугао који указује на ред ротације, нпр. једнакостранични троугао да бисте указали на центар ротације реда 3, тј. ротације са 120° , итд.). За оне са ротационом симетријом, допишите број n да укажете на n -тоструку ротациону симетрију.



Полиедри

Полиедар је геометријско тело, са странама које су многоуглови. Свака пљосан (страна) полиедра је део равни облика многоугла. Ивица полиедра је дуж коју садрже две суседне стране. Теме полиедра је тачка у којој се сустичу три или више страна. Полиедар је конвексан ако за било које две тачке на површи полиедра да дуж која их спаја налази се цела или у унутрашњости или на површи полиедра. Једноставан однос између броја темена T , ивица I и страница P за конвексне полиедре је дат Ојлеровом (Euler) формулом : $T + P - I = 2$.

Пет правилних полиедара су једини конвексни полиедри чија је свака страница исти правилан многоугао, а све темена су истог типа. С лева на десно, њихова имена су тетраедар, коцка (хексаедар), октаедар, додекаедар и икосаедар.



Правилан додекаедар има 12 страница које чине правилни петоуглови. Други тип додекаедра је ромбски додекаедар, у којем је свака страна ромб. Ромбски додекаедар је блиско је повезан са коцком и октаедром. Краће дијагонале ромбова чине коцку, док дуже дијагонале чине октаедар, као што је доле приказано.

Однос дужине дуге и краће дијагонале је $\sqrt{2}$, па су углови у ромбовима око 70.53° и 109.47° . Они се само незнатно разликују од углова од 72° и 108° коришћених у горе приказаним плочицама са мотивима лигње и морске корњаче. За последњи радни лист, плочице са мотивима лигње и морске корњаче су искривљене како би стале у ромове једног ромбског додекаедра.

Активност 2: Особине правилних полиедара и Ојлерова формула

Водич за наставнике

Материјали: Копије Радног листа 2 за ученике.

Циљ: Упознати ученике са особинама правилних полиедара, као што је број страница, ивица и темена које сваки од њих поседује, упознати их са Ојлеровом формулом и научити их да је примењују на примерима различитих полиедара.

Речник: Правилан полиедар, страна, теме, ивица.

Редослед активности:

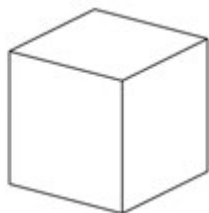
1. Поделите радне листове.
2. Напишите појмове из речника на табли и разговарајте о значењу сваког од њих.
3. Нека ученици попуне табелу на врху радног листа. Затим нека размене своје одговоре и попуне табелу на горњој копији радног листа. У доњој табели, за сваки полиедар први број је број пљосни, други број је број ивица, трећи број је број темена. Четврти симбол (тзв. Шлефликев симбол) означава број и облик пљосни које се сустичу у сваком од темена полиедра: нпр. код тетраедра у сваком темену се сустичу по 3 троугла, код коцке по 3 четвороугла, код октаедра по 4 троугла, итд. Покушајте да успоставите везу између полиедара којима одговарају овакви темени симболи са узајамно ревертованим бројевима, нпр. $\{3,4\}$ и $\{4,3\}$. Полиедре са оваквим својством називамо узајамно дуалним. Шта значи дуалност полиедара у геометријском смислу?

Тетраедар	4	6	4	$\{3,3\}$
Коцка	6	12	8	$\{3,4\}$
Октаедар	8	12	6	$\{4,3\}$
Додекаедар	12	30	20	$\{3,5\}$
Икосаедар	20	30	12	$\{5,3\}$

4. Нека ученици заврше наредна три задатка сређивања и груписања полиедара. Затим нека размене своје резултате и напишу их на горњој копији радног листа.

5. Разговарајте о Ојлеровој формули. Замолите ученике да израчунају вредност $T + P - I = n$ за сваки од пет правилних полиедара. Уверите се да сви разумеју зашто је $n = 2$, а затим нека реше преостале задатке на радним листовима. Нека ученици размене своје одговоре. Нацртајте неку теселацију на торусу (аутомобилској унутрашњој гуми). Покушајте да онда израчунате вредност броја $T + P - I = n$. *Испробајте исту ствар са различитим теселацијама торуса.* Да ли увек добијате исту вредност броја n и колика је она? Покушајте исто то са телом у облику ђеврека!

Радни лист 2. Особине Правилних полиедара и Ојлерова формула



Попуните табелу испод особинама сваког правилног полиедра.

Име полиедра

Број
пљосни P

Број
ивица I

Број
темена T

Број пљосни које се
сустичу у сваком темену

Наведите правилне полиедре према броју пљосни (страна), од најмањег до највећег.

Групишите правилне полиедре према броју ивица сваке од пљосни, од најмањег до највећег. Колико група постоји?

Групишите правилне полиедре према броју пљосни које се сустичу у сваком темену, од најмањег до највећег. Колико група постоји?

Ојлерова формула описује једноставан однос броја темена, пљосни и ивица у сваком конвексном полиедру (који се може надувати тако да постане сфера):

$T + P - I = n$. Користећи горњу табелу, одредите колика је вредност n . Након тога употребите формулу да одговорите на доње питање.

Кубоктаедар има 12 темена и 24 ивице. Колико страница има?

Засечени октаедар има 24 темена, 36 ивица и 8 шестоугаоних страница. Преостале пљосни су квадратне. Колико их има?

Засечена коцка има исти број пљосни као засечени октаедар и 24 темена. Колико ивица има?

Активност 3: Ромбски додекаедар украшен теселацијом

Водич за наставнике

Материјали: Копије Радних листова 3а и 3б за ученике. Оловке у боји или фломастери, маказе и лепак или самолепљива провидна трака. Ако је могуће, користите дебљи папир, као што је картон, пошто ће полиедар онда бити чвршћи.

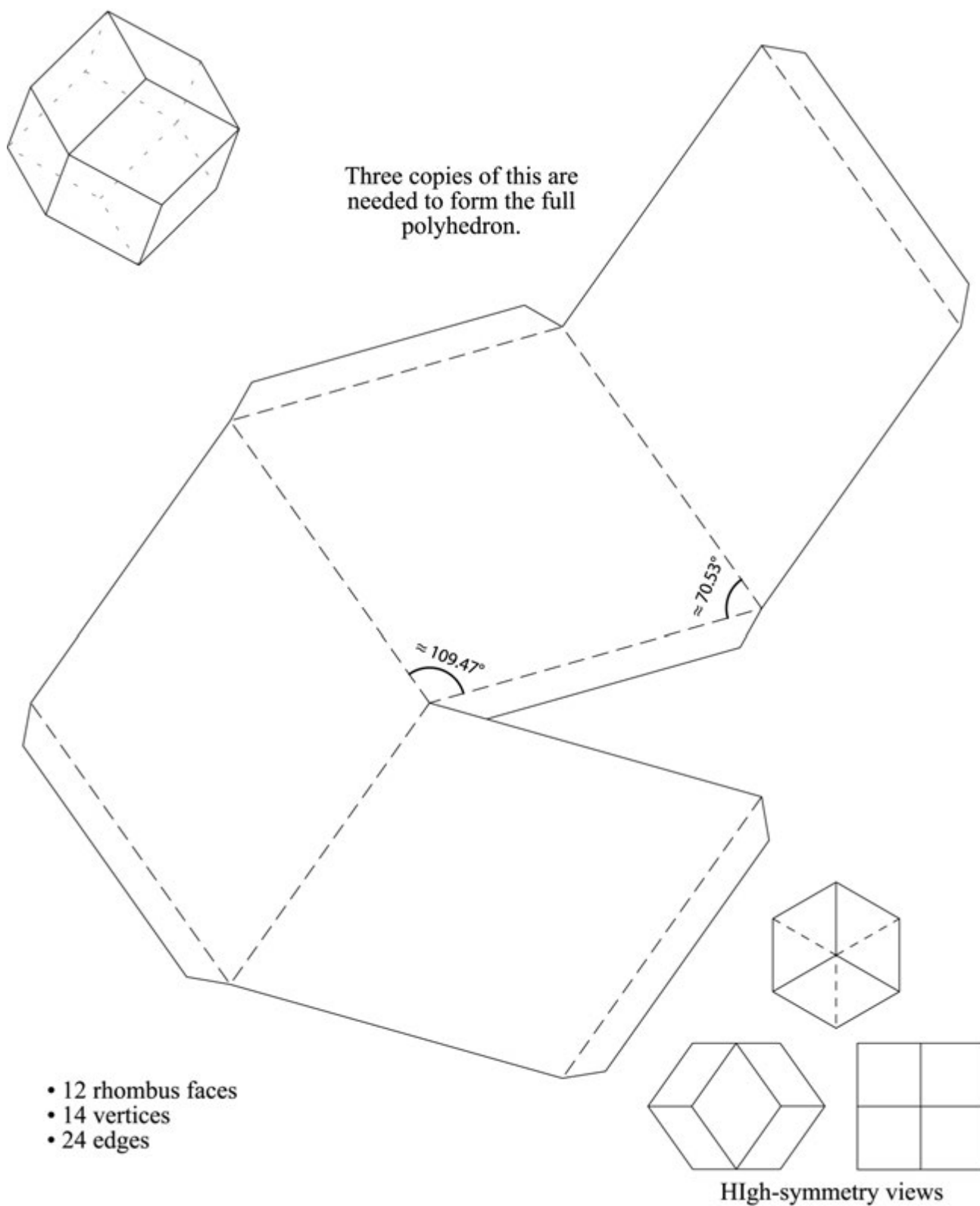
Циљ: Схватити везу између ромбског додекаедра, коцке и октаедра и начине како се теселација у равни може прилагодити како би се поплочао неки полиедар.

Речник: Ромбски додекаедар.

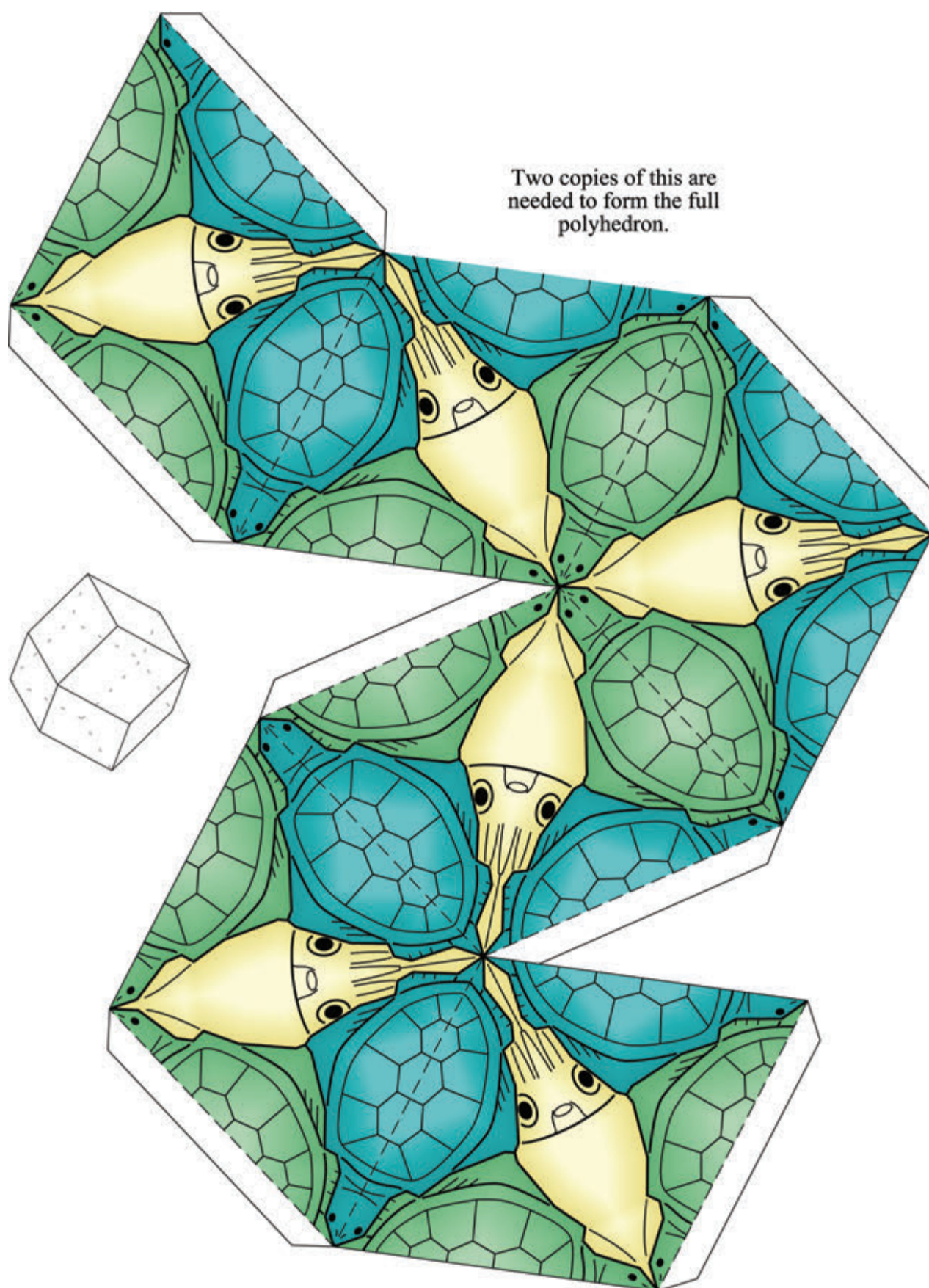
Редослед активности:

1. Поделите ученицима Радне листове 3а. Потребно је по три примерка како би се формирао један полиедар.
2. Напишите појам из речника на табли и разговарајте о његовом значењу.
3. Нека ученици нацртају дијагонале сваког ромба на Радном листу 3а користећи оловке у боји или фломастере.
4. Нека ученици конструишу полиедар на Радном листу 3а.
5. Замолите ученике да опишу како један скуп дијагонала чини ивице коцке, а други даје ивице октаедра.
6. Нека ученици конструишу полиедар на Радном листу 3б.
7. Ако има времена, ученици могу да нацртају свој сопствени декоративни дизајн на копијама Радног листа 3а и конструишу полиедар са својом сопственом декорацијом.

Радни лист 3а. Користите оловку у боји или фломастер да нацртате дужу дијагонали сваког ромба. Затим користите другу боју да нацртате краћу дијагонали. Коначно, направите ромбски додекаедар сечењем дуж пуних линија и савијањем дуж испрекиданих линија. Умeci иду испод плjosни, а може се користити и самолепљива трака или лепак да се полиедар не расклопи.



Радни лист 3b. Конструирајте један ромбски додекаедар украсен мотивима лигње и морске корњаче.





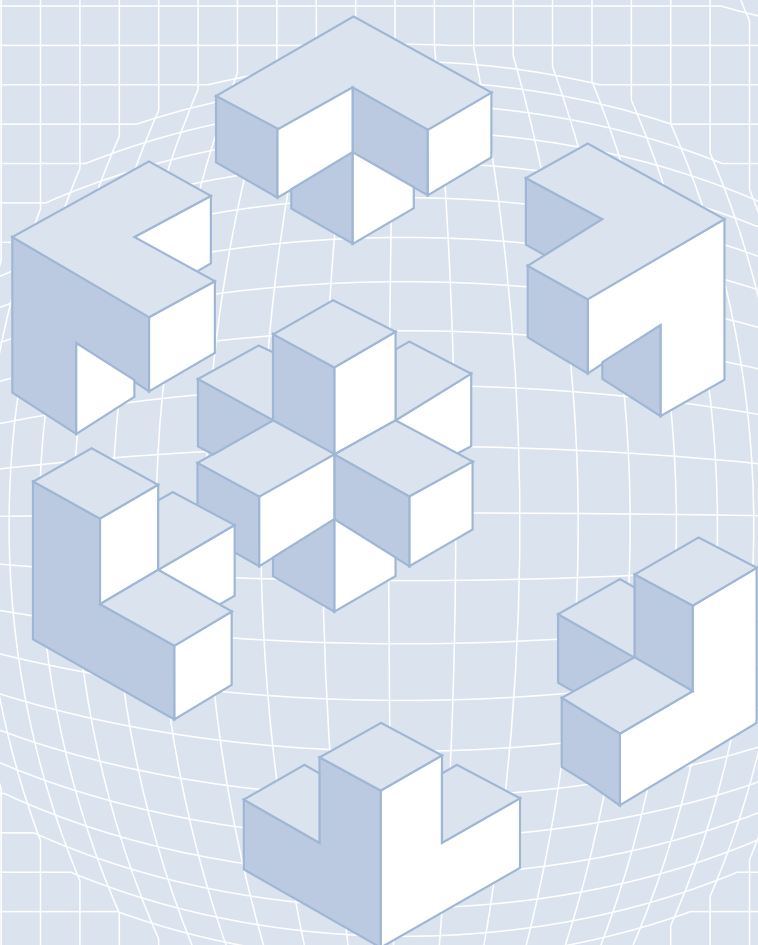
VISUALITY &
MATHEMATICS

EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

Илона Олађе Тегласи

Игре типа Танграма и игре са шибицама

ЗАГОНЕТНЕ СИМЕТРИЈЕ





Илона Олање Тегласи (Ilona Oláhné Téglassi) О аутору: Дипломирала је на Етвеш Лоранд (Eötvös Lóránd) универзитету у Будимпешти као професор математике и физике за средњу школу. Већ 20 година предаје у средњим школама, укључујући и 5 година менторског рада са студентима Учитељског факултета Естерхази Карољи колеџа у Егеру (Training School of Eszterházy Károly College, Eger). Почела је да ради на Катедри за математику на Естерхази Карољи колеџу 2008. године, а у исто време је започела докторске студије на Универзитету у Дебрецину. Њена докторска теза се односи на развој и евалуацију математичких компетенција. Тренутно предаје основне математичке предмете и математичке дидактичке предмете на Естерхази Карољи колеџу студентима– будућим наставницима математике.

1. Игре типа Танграма које развијају појам површине и запремине

Општи увод: Када предају о површини многоуглова, наставници често констатују да ученици само напамет науче формуле за површине различитих многоуглова и да код њих не постоји право схватање о томе шта се крије иза тих формула. Овај недостатак се може отклонити коришћењем древне кинеске игре под називом „Танграм“, која захтева да играчи праве различите фигуре од квадрата подељених на 7 делова. Ова игра може да помогне ученицима да развију дубље разумевање о појму површине многоуглова. Циљ ове слагалице је да се формира фигура (само као силуета) користећи свих седам комада, који не могу да се преклапају. Ова игра потиче из Кине, а након тога је пренета у Европу трговачким бродовима почетком 19. века. Временом је ова игра постала веома популарна у Европи. За време Првог светског рата била је једна од најпопуларнијих геометријских слагалица у свету. Преко 6500 различитих "Танграм" проблема је прикупљено у записима из 19. века и тај број још увек расте, али је овај број, ипак, коначан. Фу Траинг Ванг (Fu Traing Wang) и Чуан-Чин Хсиунг (Chuan-Chin Hsiung) су 1942. показали да постоји само тринаест конвексних "Танграм" конфигурација. (видети [5]).

Једно важно својство површине равних фигура - према једној од Хилбертових аксиома - јесте да ако поделимо равну фигуру на делове, збир површина тих делова је једнак површини оригиналне фигуре. Често користимо



ову особину када треба да меримо површину сложене фигуре: делимо је на једноставне многоуглове чију површину можемо лако израчунати. У таквим задацима можемо видети да они ученици који су само научили формулу, не могу лако ни да почну да их решавају, јер јер нису ни свесни тог аксиома.

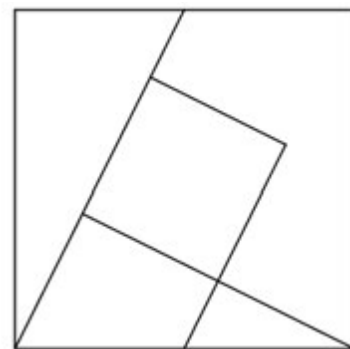
Веома је корисно користити "Танграм" када се ученици први пут упознају са појмом површине (5. – 6. разред), тако да ученици буду у стању да користите овај метод касније у средњошколским задацима. За наставу математике може да се користи оригинална игра, јер постоји много сајтова на интернету одакле се могу преузети фигуре (видети [4], [5] и [6]). Од неколико хиљада могућих облика треба да изаберемо оне који се најбоље уклапају у наставни план и програм математике (оригинално рашчлањавање можете видети на Сл. 1),

Слика 1. Оригинални кинески

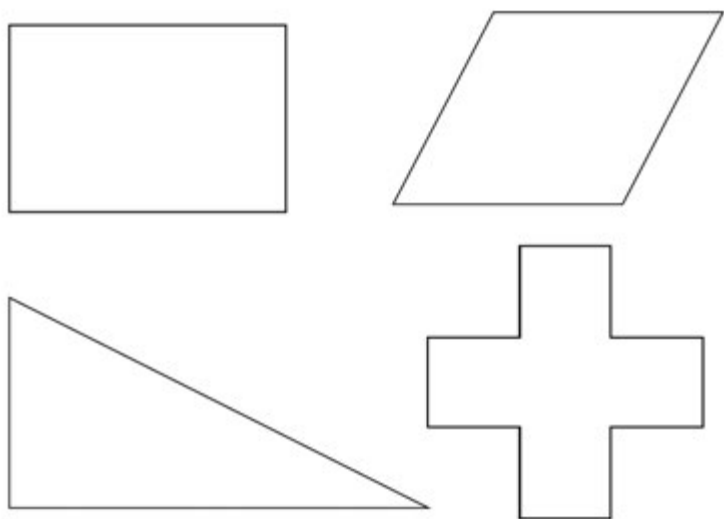
"Танграм" квадрат

или можемо направити нове облике, као у следећем задатку

Задатак: Од квадрата датог на Слици 2 који је подељен на 5 делова формирати правоугаоник, паралелограм, троугао и крст, састављајући их од свих датих делова које треба размештати на различите начине, без празнина или преклапања (ово је првобитно изумео Сам Лојд, о овоме видети [3], [4] и [6])



Слика 2. Сем Лојдов танграм



Слика 3. Фигуре из горњег задатка

Решења:



Слика 4. Како наптивити крст



Слика 5. Како наптивити троугао



Слика 6. Како наптивити правоугаоник

Слика 7. Како наптивити паралелограм

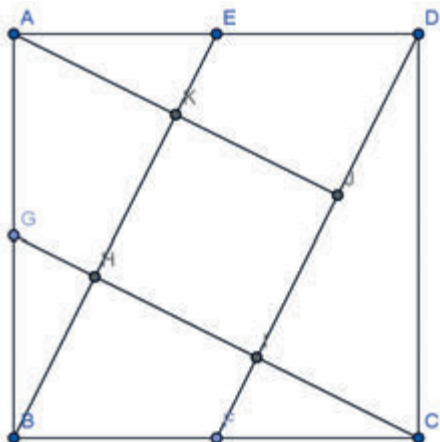
Након креирања различитих многоуглова, може се ученицима указати да је површина ова четири различита многоугла једнака површини оригиналног квадрата: $T = a^2$. За ниже разреде, такође, може се говорити и о другим својствима тих многоуглова. Такође, могуће је да саставити и друге задатке на основу ових слика, у зависности од узраста ученика, (на пример, видети [2]):

1.1 Користећи површину оригиналног квадрата, утврди површину свих 5 делова?

Одговор: Ако са T означимо површину оригиналног квадрата, тада је површина плавог квадрата $\frac{1}{5} T$, површина „великог“ троугла је $\frac{1}{4} T$, површина „малог“ троугла је $\frac{1}{20} T$, површина трапезоида је $\frac{3}{20} T$, а површина конкавног шестоугла је $\frac{7}{20} T$.

1.2 Колике су дужине страница ових 5 делова у односу на дужину странице оригиналног квадрата? Колико различитих дужина постоји?

Одговор: Можемо рећи ученицима да су тачке E, G и F средишне тачке страница квадрата. Ако уцртамо и неке помоћне дужи и тачке, можемо видети да постоје четири различите дужине које морамо да одредимо: (BE) , (GH) , (HI) , (ED) . Лако можемо наћи ове дужине помоћу Питагориног теореме и сличности одговарајућих троуглова (Сл. 8).



Слика 8: Приказ конструкције слагалице

Зато што је $a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = BE^2$, $BE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. следећи троуглови су слични: $ABE\Delta \sim HBG\Delta$ (оба су троугла правоугла и имају заједнички угао на темену B), тако да је $\frac{GH}{GB} = \frac{AE}{EB}$, а $GB = AE = \frac{a}{2}$; стога је $GH = \frac{a\sqrt{5}}{10}$. Због сличности ова два троугла, такође можемо закључити да је $\frac{HB}{GH} = \frac{AB}{AE} = \frac{2}{1}$, тако да је $HB = \frac{a\sqrt{5}}{5}$, а $HB = HI = IJ$. И знамо да је $ED = \frac{a}{2}$ (Слика 8).

1.3 Колики су површине ових 5 делова?

Одговор:

$$P_{ABE} = a + \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(3+\sqrt{5})}{2}, P_{BFIH} = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{10} + 2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}, P_{FCI} = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{5} + \frac{a\sqrt{5}}{10} = \frac{a(5+3\sqrt{5})}{10},$$

$$P_{HIJK} = 4 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{5}, P_{CDEKJI} = a + \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{10} + 3 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{a(15+7\sqrt{5})}{10}.$$

1.4 Колики су обими датих фигура?

Одговор: Већ смо говорили о томе да је површина свих многоуглова који се добијају од истог почетног квадрата иста, без обзира на размештај делова. Али сада се може указати да је могуће конструисати фигуре са истом површином и са различитим обимом. Обим крста са Сlike 4 је $12 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{5}$, обим троугла са Сlike 5 је

$$3a + 2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = a(3 + \sqrt{5}), \text{ обим правоугаоника са Сlike 6 је } 2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{5}}{2} + 2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{a \cdot 9\sqrt{5}}{5} \text{ и обим паралелограма са Сlike 7 је } 2 \left(a + \frac{a\sqrt{5}}{2}\right) = a(2 + \sqrt{5})$$

Оваквим једноставним растављањем квадрата можемо мотивисати ученике, а решавањем овог низа вежби можемо развити њихово пазумевање појамова о површини и обиму.

Слично, са 3Д геометријским слагалицама можемо постићи сличне резултате код ученика при схватању појма запремине тела. На пример, можемо их користити да помогнемо ученицима да схвате својства и запремине полиедара и то: коцке, тетраедра, пирамиде, 3Д крста, „звезде“, итд (видети [8]).



Слика 9. Склопљена коцкаста змија



Слика 10. Расклопљена коцкаста змија

Ученицима је често тешко да схвате зашто је запремина једне коцке чија ивица износи 3 јединице мере, једнака 27 кубних јединица те мере. Можда зато јер не могу да замисле унутрашњост коцке. Ако раставе „коцкасту змију“ (Сл. 9 – 10), они физички могу да изброје колико има јединичних коцки у великој коцки.



Слика 11. 3Д склопљена коцка-слагалица



Слика 12. 3Д растављена коцка-слагалица

Други пример је следећа коцка-слагалица, која се може раставити на делове који су састављени од три јединичне, односно четири јединичне коцке (Сл.11-12). Један задатак за ученике је да саставе велику коцку од делова, а други да се одреди њена запремина. Кроз ове игре можемо комбиновати играње са озбиљним учењем, чиме ће ученици бити мотивисани да раде задатке.

На први поглед ово су само лепе игре – али оне такође наводе децу на размишљање, мотивишу их да уче и показују им како могу да решавају проблеме. За наставника математике ове игре пружају још много више: оне су добри алати за развијање математичких способности код ученика, као што су: просторне способности, логичко размишљање, закључивање по аналогији, као и дедуктивно закључивање и учење стратегија за решавања проблема (видети [2]).

Укратко, коришћењем кинеске игре "Танграм", у учионици можемо створити низ задатака који могу бити занимљиви, који могу да мотивишу ученике, а такође се уклапају у наставни план и програм из математике.

2. Слагалице од шибица на часовима математике

Општи увод: Већина нас се сећа друштвених игара са шибицама, где треба да уклонимо или заменимо место неким шибицама на датој слици да би формирали неку другу фигуру. Овакав тип слагалица је популаран, оне су корисне за развијање тимског рада, а за њихово коришћење потребно је имати само неколико кутија шибица. Постоји више различитих врста ових слагалица, при чему можете направити сопствену слагалицу или користити Интернет да бисте пронашли оне које одговарају одређеној теми лекције из математике. Ове слагалице могу развити вештине логичког размишљања, препознавања просторних односа, својстава равних фигура, геометријских трансформација, мерења дужина и површина – при чему смо поменули само неке могућности. Можемо поделити ове слагалице у различите групе према задатку који треба решити:

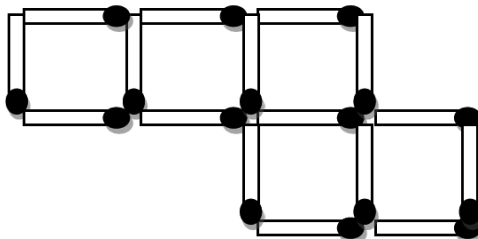
1. формирање других многоуглова од датих многоуглова, користећи особине многоуглова;
2. формирање различитих многоуглова од датог броја шибица;
3. логички проблеми -визуелизација негеометријских проблема (видети [1]).

У овој вежби ћемо показати само неке од могућих задатака и дати неке методолошке примедбе о њима. Можемо наћи многе од ових слагалица на Интернету (видети [7]).

Задаци:

1. У овим задацима користимо шибице као јединице за дужину, а играмо се са различитим облицима и величинама полигона, као у следећим примерима. Ове вежбе су добре за млађе узрасте, када се уче различити многоуглови и трансформације једних у друге.

- 1.1 Преместите 2 шибице да бисте добили 3 мала и 1 велики квадрат!



Слика 13. 3+1 слагалица са квадратима

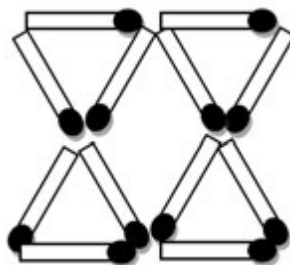
1.2. Преместите 2 шибице да бисте добили 4 једнакокрајна троугла!

Слика 14. Слагалица од четири троугла



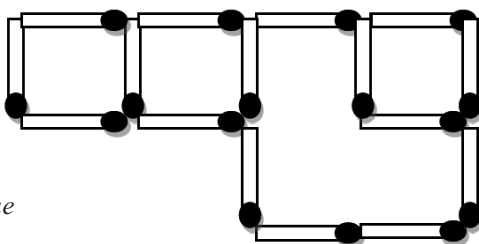
1.3. Преместите 4 шибице да бисте добили 6 једнакокрајних троуглова!

Слика 15. Слагалица од шест троуглова



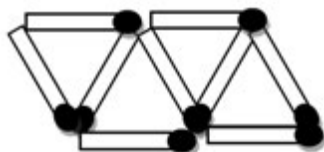
Решење:

1.1. Досетка је у томе да „велики квадрат“ има 2 стране од којих свака има по две мерне јединице (две шибице). Стога користимо транслацију, тако да трансформисана фигура изгледа овако:



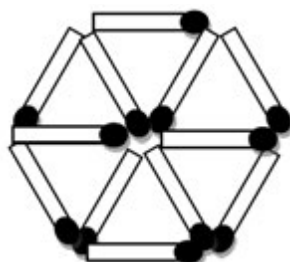
Слика 16. Решење 3+1 слагалице од квадрата

1.2. Досетка је да користимо централну симетрију да бисмо добили 4 троугла:



Слика 17. Решење слагалице од четири троугла

1.3. У овом случају користимо транслацију када премештамо шибице:



Слика 18. Решење слагалице од шест троуглова

2. Следећи задаци могу да помогну ученицима да схвате разлику између површине и обима, а могу бити коришћени за упознавање са решавањем “изопериметријских проблема” у средњој школи. Поново користимо шибицу као јединицу за дужину, а површину квадрата формираног од 4 шибице користимо као јединицу за површину.

2.1. Формирајте онолико различитих простих многоуглова, колико можете, користећи 12 шибица које не прелазе једна преко друге (свака шибица мора бити на ободу многоугла)!

2.2. Такође формирајте конвексе и конкавне многоугле од 12 шибица!

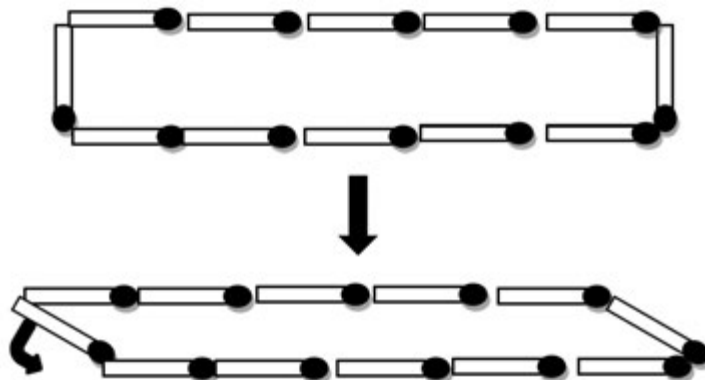
2.3. Шта је заједничко свим формираним многоуглима?

2.4. Покушајте да израчунате површину свих многоуглова које сте направили (само за ученике средњих школа)!

2.5. Који многоугао има највећу површину, а који најмању?

Решења:

- 2.1. Ученици могу да формирају различите многоугле - замолите их да кажу који многоугао су формирали (троугао, правоугаоник, шестоугао, итд.). Можда бисте могли да објасните шта значи термин „прост многоугао“. Број формираних многоуглова може нам дати увид у креативност ученика (они такође могу да раде у групама, видети [2]). Можда ће сви многоугли бити конвексни – тако да долази следећи задатак.
- 2.2. Ако ученици не формирају конкавне многоугле у првом задатку, сада ће вероватно формирати крстове, различите „звезде“, итд. Постоји много могућих фигура које се могу формирати и то све зависи од времена датог за овај задатак, а такође и од креативности ученика.
- 2.3. Заједничко за све ове многоугле јесте да им је обим исти и износи 12 мерних јединица (тј. шибица). Можемо рећи ученицима да исти обим може да обухвати различите површине (сличан задатак са горе наведеним задатком о растављању квадрата).
- 2.4. Овај задатак је углавном намењен ученицима средњих школа, јер у неким случајевима треба применити тригонометријске формуле. Ова вежба је такође корисна за разговор о изворном значењу мерења - дајемо јединицу дужине и јединицу површине, користимо аксиоме мерења - и дужину шибица као јединицу (не користите сантиметре, јер одузимају јединственост ове вежбе!). Такође можемо замолити ученике да поређају многоугле према растућој или опадајућој површини.
- 2.5. Након што су израчунали површину неких формираних фигура, ученици могу формулисати хипотезу да највећу површину има правилан дванаестострани полигон – а чак и сада се сусрећемо са изопериметријским проблемом. Од групе и узраста ученика зависи колико дубоко можемо да идемо у разматрање овог проблема. Са друге стране, занимљиво је питање који многоугао има најмању површину. Покушајте да питате ученике додатна питања која их доводе до хипотезе: да ли се може добити многоугао са површином мањом од сваког датог позитивног броја. На пример, формирање паралелограма и непрекидно смањивање његовог угла од 90° до 0° доводи у сваком следећем кораку до паралелограма са мањом површином (Сл. 19). Да бисмо доказали ову тезу, потребни су нам аналитички алати, тако да овај део проблема такође зависи од групе са којом радимо.

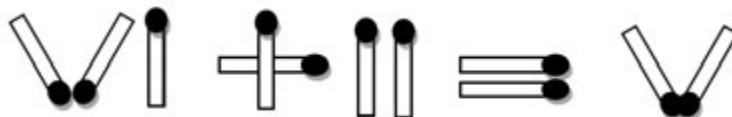


Слика 19. Смањивање површине и задржавање обима

3. Следећи задаци су намењени развоју логичких вештина, захтевају креативност и могу се користити као мотивација пре неког озбиљнијег математичког задатка са шибицама сличног горњим задацима, можда и за опуштање на крају часа. Али пре него што помислимо да ови задаци служе само за забаву, морамо да поменемо да решења ових задатака подстичу вештину размишљања код ученика (видети [1,2]).

Задаци:

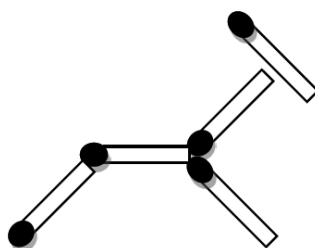
- 3.1. Направите тачну једнакост померањем само 1 шибице!



Слика 20. Слагалица-једначина

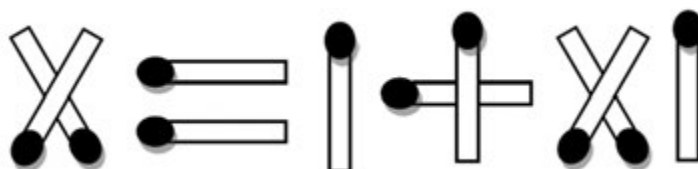
- 3.2. Поређајте 6 шибица заједно, тако да свака шибица додирује сваку другу шибицу!

3.3. Ово је тркачки коњ. Преместите 1 шибицу тако да се коњ коњ креће у супротном смеру!



Слика 21. Слагалица- коњ

3.4. Како можемо да ову једначину учинимо тачном без додавања, одузимања или померања шибица?



Слика 22. Загонетна слагалица - једначина

За последња четири задатка не дајем решења – она су такође изазов за наставнике. Можете да испробате своје сопствене вештине логичког размишљања! Надам се да ће сви уживати размишљајући о њима.

На крају бих желела да поменем да је ово само мали избор примера који илуструју како можемо да користимо шибице на часовима математике. Надам се да сам вас инспирисала да их испробате и да креирате сопствене слагалице са шибицима за ваше часове!

Референце:

1. Jerome Bruner: The Process of Education (Harvard University Press, 1999)
2. Robert Fisher: Teaching Children to Think (Nelson Thornes Ltd., 2005)
3. <http://www.samloyd.com>
4. <http://www.puzzles.com/puzzleplayground/TrapezoidalTangram>
5. <http://www.tangram-channel.com/>
6. Sam Loyd's book of tangrams (Dover Publications Inc., 2007)
7. <http://matchstickpuzzles.blogspot.hu/>
8. <http://www.theiqgames.com>



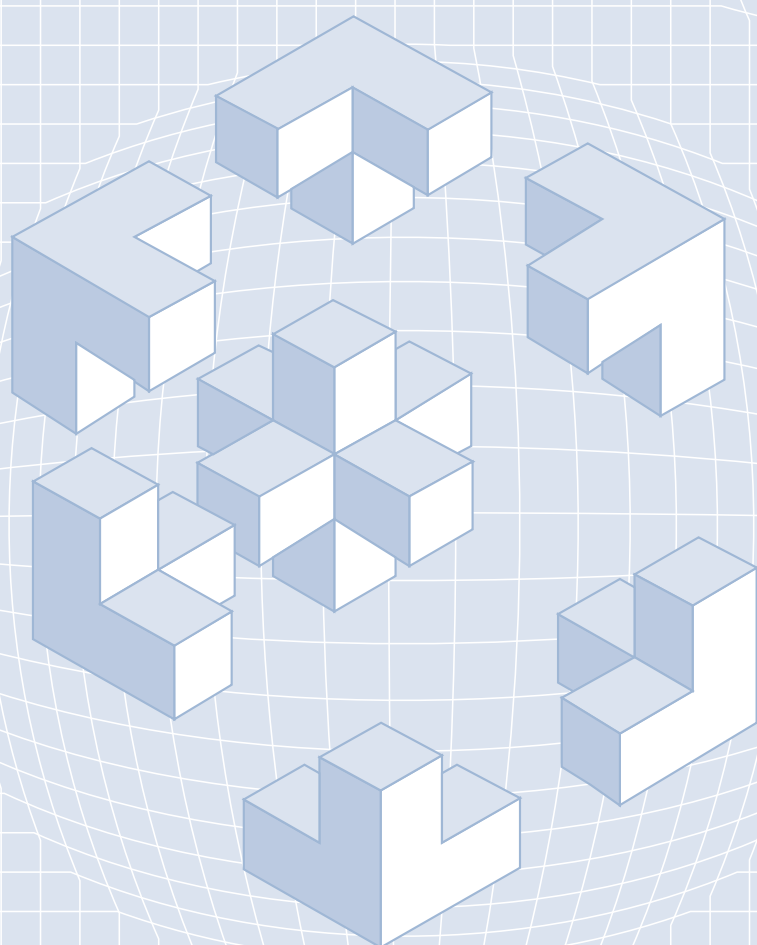
VISUALITY &
MATHEMATICS

EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

Елеонора Штетнер

Мебијусова трака и симетрије бордура

ЗАГОНЕТНЕ СИМЕТРИЈЕ





Елеонора Штетнер је доцент и шеф Одељења за математику и физику на Универзитету у Капошвару. Пре него што је почела да предаје на Универзитету у Капошвару, она је подучавала математику, физику и рачунарство у једној средњој школи 25 година. Елеонора је тада написала докторску дисертацију о топологији површи. У својој тези је генерисала површи помоћу рачунара и приказала симетрије неоријентабилних површи. Такође је учествовала у раду Радионице искуства као координатор истраживања још од времена оснивања радионице. Сада предаје математику на основним, мастер и докторским студијама на Универзитету у Капошвару и креирала је план и програм једног новог предмета: математика и уметности. Елеонора предаје тај предмет као изборни предмет студентима Универзитета.

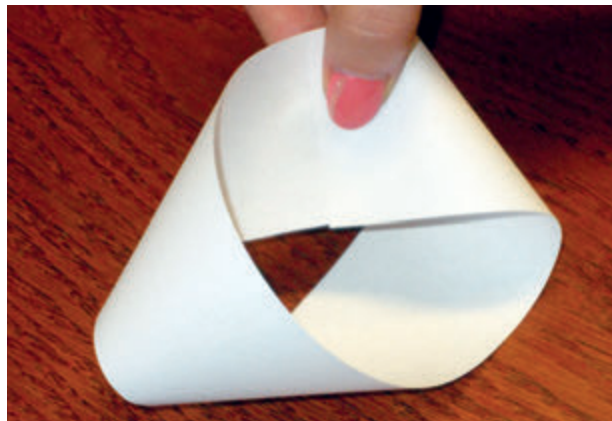
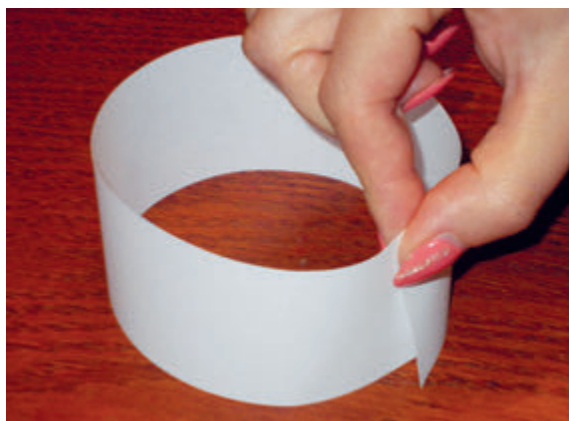
Увод

Циљ овог рада је да покаже до колико занимљивих математичких области и проблема се може доћи коришћењем обичне папирне траке.

На пример, могу се проучавати различите површи, без обзира да ли имају једну или две стране, као и бојења мапа и графова на неким необичним површима, која поседују веома специфичне особине. Графови могу бити представљени матрицама на много начина. На пример, ако су обрасци са осном симетријом нацртани на папирној траци, онда образац добијен спајањем крајеве те траке даје утисак бескиначног кретања. Стога се враћамо на наше првобитно питање: да ли једнострана или двострана површ добијена слеplивањем крајева чува симетрију полазне бордуре (фриза)?

Неке једноставне карактеристике Мебијусове траке

Мебијусова трака је најпознатији једнострана површ, која се такође назива не-оријентабилном. Шта то значи да површ има само једну страну? То се може утврдити на различите начине. Ако узмемо релативно дуг правоугаоник (правоугаону траку), онда две краће стране могу бити спојене на два различита начина: као цилиндрична површ или као Мебијусова трака, користећи папирну траку чији се један краћи крај заротира за пола круга, а затим се крајеви траке споје како би направили колут (Слика1). Цела дужина Мебијусове траке (са обе стране оригиналног папира) може да се боји широком четкицом, а да се никада не пређе преко ивице. Ово не функционише на цилиндричној површини која има две стране, тј. која је оријентабилна. Мебијусова трака има једну страну, за разлику од цилиндричне површине са спољашњом и унутрашњом страном.

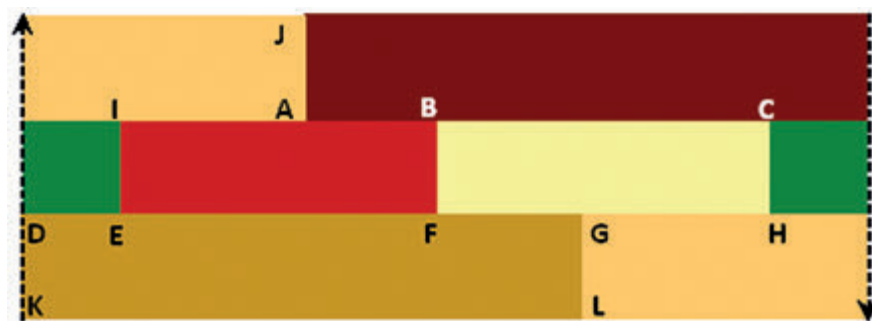


Слика 1: а) Цилиндрична површ од папирне траке; б) Мебијусова трака.

Интересантан резултат се добија ако исечемо Мебијусове траке формиране од правоугаоника приказаних на Слици 13 дуж испрекиданих линија. Шта добијамо на овај начин? Колико пута су траке добијене сечењем уврнуте? Да ли добијене површи имају једну или две стране? То можемо проверити цртањем линије паралелно са ивицом траке дуж средње линије из било које тачке на површи. Ако се линија која се завршава у полазној тачки нацрта дуж целе траке, онда површ има једну страну; међутим, ако постоји било који део површи где средишња линија није нацртана, тада површ има две стране. Исту проверу можемо извршити бојењем, као у случају Мебијусове траке. Добивамо изненађујући резултат и ако поново на исти начин сечемо новодобијену траку добијену сечењем прве траке по средишњој линији. Наставите овај алгоритамски поступак и проучите добијене траке.

Мебијусова трака и бојене мапе

Стари, класичан проблем са дугом историјом јесте тзв. „проблем четири боје“ или „теорема четири боје“ која наводи да се свака мапа на сфери (теселација сфере "ивица уз ивицу") може обојити са не више од четири боје тако да не постоје суседни региони мапе које имају исту боју. Два региона мапе се називају суседним уколико поседују заједничку границу (ивицу), где су углови тачке у којима се сустичу три или више региона. Проблем су доказали Кенет Апел и Волфганг Хакен 1976., смањењем бесконачног броја потенцијалних мапа у одређеном скупу мапа, а потом помоћу посебног компјутерског програма потврдили да свака од ових мапа има ову особину. Занимљиво је и изненађујуће да је проблем бојења мапа решен на Мебијусовој траци пре него у случају планарних (сферних) мапа. Колико је најмање боја потребно да се обоји било која мапа на Мебијусовој траци тако да не постоје две суседне области које имају исту боју? На Мебијусовој траци тај број је шест. Слика 2 приказује један пример за то. Исеците обојену папирну траку на Слици 2, направите Мебијусову траку и избројте суседне регионе сваког региона. Да ли их увек има по пет?

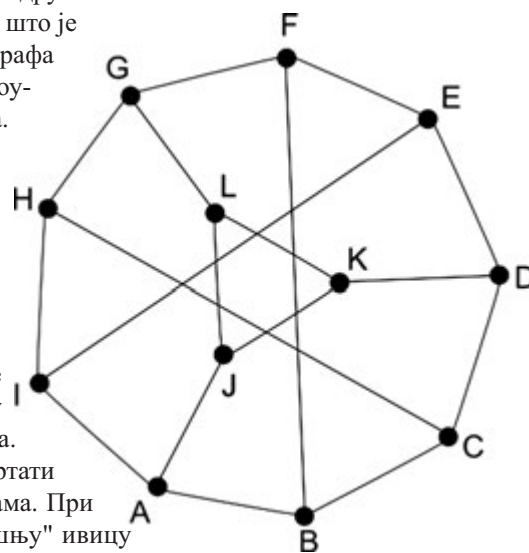


Слика 2: „Мапа“ на Мебијусовој траци; свака „земља“ има пет суседних земаља

Тицеов граф

Мапа бојења Мебијусове траке води до неких проблема у теорији графова. Региони на овој мапи су правоугаоници (то свакако није нужно, региони могу бити других облика). Означите темена правоугаоника великим словима као што је приказано на Слици 2. На овај начин је добијен граф. Темена графа су само означене тачке, а његове ивице су ивице малих правоугаоника. Све остале пресеке ивица не сматрамо теменима графа.

Тицеов граф се такође може проучавати на Мебијусовој траци. Трака на Слици 14 приказује правоугаоник од кога састављамо бојену Мебијусову траку, тј. бојену мапу, а друга трака на истој слици приказује само граф. Ако исечемо трећу траку приказану на Слици 14 и залепимо је на уобичајен начин да бисмо добили Мебијусову траку, а онда обележимо регионе тако да остану само темена и ивице, тада се добија Тицеов граф на површини Мебијусове траке. Избројите темена и ивице графа и одредите степен темена (број ивица које се сустичу у сваком од њих). Покушајте да нацртате граф на листу папира. Можемо да видимо да то није планарни граф јер се не може нацртати тако да се његове ивице секу само на њиховим крајњим тачкама. При томе ивице дозвољавају померање, дакле било коју "унутрашњу" ивицу можемо померити "напоље" или закривити: довољно је да само и даље спаја два ита полазна темена. Евентуалне новодобијене тачке (самопресеке ивица) не сматрамо теменима графа. На нацртаној Мебијусовој траци ниједна ивица нема самопресека, већ се ивице сустичу само у својим крајњим тачкама- теменима графа.



Слика 3: Потенцијални изглед Тицеовог графика у једној равни

Изоморфизам и бојење Тицеовог графа

Шта значи у опису Слике 3 да постоји потенцијални изглед графа? Да ли га такође можемо нацртати на другачији начин? И ако се чини да су два графа визуелно различита, могуће је да они представљају исти граф. У овом случају кажемо да су два графа изоморфна. Два графа G и H су изоморфна ако постоји бијективно пресликавање f графа G на граф H које чува ивичну структуру и теменску структуру у смислу да постоји ивица i која спаја два темена града G ако и само ако у графу H постоји ивица $f(i)$ која спаја темена $f(u)$ и $f(v)$. Лако је конструисати изоморфне графове, на пример у компјутерском програму GeoGebra који се може преузети бесплатно са сајта www.geogebra.org. Нацртајте Сliku 3 у програму GeoGebra. Док дајете инструкције користите само темена и ивице које их спајају, али не и полигон. Ово је важно јер се граф може

формирати/расформирати произвољно на овај начин, па се изоморфни графови могу лако нацртати на више разних начина. Конструишите изоморфне графове тако да неки имају једну осу симетрије, ротациону симетрију реда 3 или нису симетрични.

Обојите темена графова тако да не постоје две крајње тачке било које ивице које имају исту боју (ивице треба да буду црне). Који је најмањи број боја потребан за овакво бојење темена графа (види Сliku 15)? Број добијен на овај начин се зове хроматски број графа. Репродуковање Сlike 14 омогућава нам да извршимо бојење.

Обојите ивице графа тако да не постоје две ивице исте боје које спајају темена (темена морају бити црна.). Који је минималан број боја потребан? Број добијен на овај начин се зове хроматски индекс графа. Слика 15 ће вам помоћи при покушају оваквог бојења.

Матрице које карактеришу Тицеов граф

Како можемо кодирати графове користећи релативно мали капацитет меморије на рачунару, тако да из података можемо недвосмислено да реконструишемо и нацртамо графове у било ком тренутку? Карактеристике графова су распоређене у табели (која се у математици назива матрица). Познато је неколико матрица за складиштење графова. Једна од њих је матрица повезаности (инциденције) графа. У првом реду и првој колони табеле су написана слова која означавају темена графа. Остатак табеле се попуњава на следећи начин: 1 је написано на укрштању неког реда и колоне ако су одговарајућа темена повезана ивицом; 0 стоји на укрштању неког реда и колоне, чија одговарајућа темена нису директно повезана ивицом. Нпр., 1 је написано на месту где се ред D и колоне C секу јер су темена D и C директно повезана једном ивицом; 0 се налази на месту укрштања реда E и колоне H, јер темена E и H нису директно повезана ивицом. Табела може бити очигледнија ако су 0 и 1 написани коришћењем различитих боја, тако да се естетски лепша и прегледнија табела може добити на овај начин. Какве карактеристике графа у погледу симетрије се могу директно уочити из матрице инциденције?

Више боја и лепша слика се може добити ако се користи матрица растојања. Да би се она попунила, поново размотрите Тицеов граф на Сlici 3. На месту пресека реда G и колоне D написан је број 3 пошто из темена G можемо доћи до темена D путем који користи најмање 3 ивице. Пошто је граф повезан, можемо доћи из сваког темена стићи до неког другог темена до сваког темена путујући дуж ивица, тако да ће се нуле налазити само на главној дијагонали табеле (пошто граф нема петљи). Различите боје се поново додељују различитим бројевима и на тај начин се граф може поново приказати једном новом шареном табелом - матрицом растојања. Поштујте симетрије чак и у овој матрици! Попуните или обојите табелу на Сlici 17 да прикажете матрице повезаности и удаљености са бројевима или бојама. Отуда се четири различите матрице графа могу уписати у табеле истог облика.

Трећа табела је матрица инциденције (тачка-ивица). Овде су ивице дате својим крајњим тачкама написане у првом реду, а темена су написана у колонама. Број 1 се налази нпр. у реду темена E и F у колони ивице EF, а 0 се налази на осталим местима која одговарају теменима. Стога ова матрица показује која два темена припадају датој ивици. Ова матрица може такође бити обојена. Прављењем двеју копија Сlike 18, може се добити матрица инциденције коју треба попунити бројевима и обојити.



Слика 4: Бојење мапе Мебијусове траке. Граф и матрице припадности су илустроване на плетеном џемперу

Линијски обрасци симетрија бордура

Опис раванских симетрија бордура може се наћи на трећој страници описа радионице СЈ.

Дискретна група симетрије, која садржи само једну трансляцију назива се група симетрије бордура или једноставно "линијски образац" (образац на траци). Бесконачни линијски обрасци тј. групе симетрије бордура које се добијају понављањем неког мотива (бесконечно много пута), могу се креирати (у погледу симетрије) на тачно седам различитих начина.

Опис седам група симетрије бордура се такође може наћи на четвртој страници горе поменутог описа радионице. Дакле овде само илуструјемо њихову листу препознајући све симетријске трансформације и цртајући образац бесконачне траке који је инваријантан у односу на све симетрије које припадају датој групи симетрија бордура.

11–Транслација

$m1$ – Транслација праћена рефлексијама у односу на осе које су ортогоналне у односу на осу транслације, где је растојање између оса рефлексије половина дужине вектора транслације

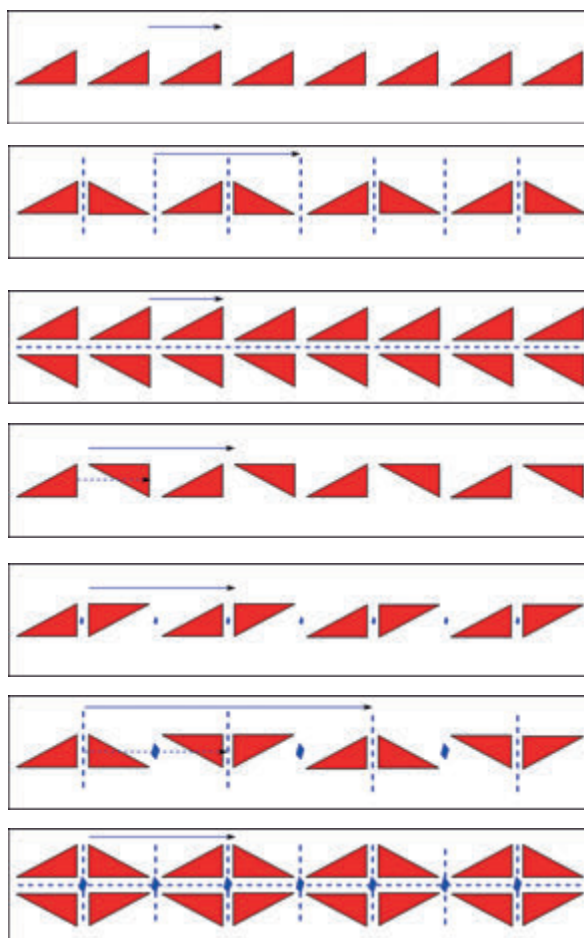
$1m$ – Транслација праћена рефлексијом у односу на осу која је паралелна са осом транслације, вектор транслације и клизајуће рефлексије које се јављају као прописвод транслације и рефлексије

$1g$ – Транслација и клизајућа рефлексија. Испрекидана стрелица означава клизајућу рефлексију и њена дужина је половина вектора клизајуће транслације

12 – Транслација и ротација за угао од 180° . Растојање између центара ротације је половина вектора транслације

mg – Транслација, ротација за угао од 180° , рефлексија у односу вертикалну осу симетрије и клизајућа рефлексија

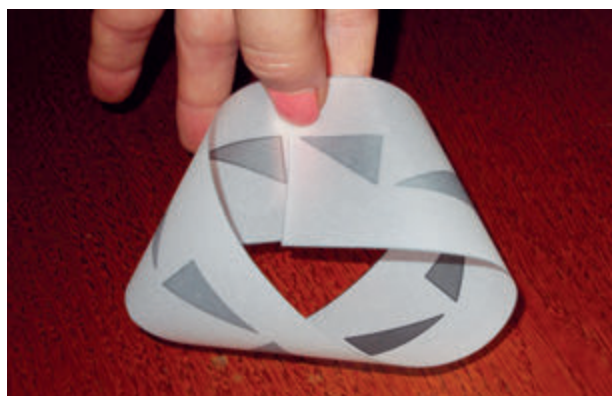
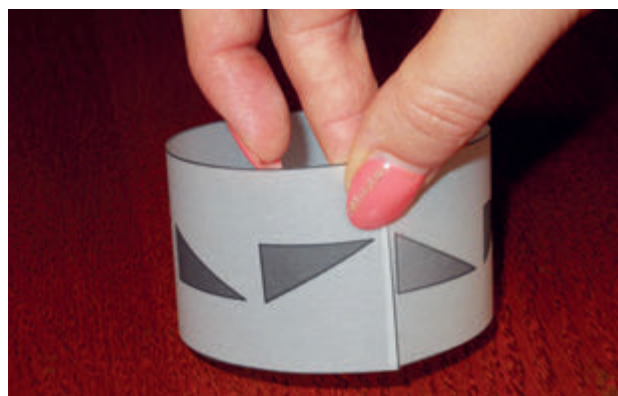
mm – Транслација, ротација за угао од 180° , рефлексије у односу на вертикалну и хоризонталну осе симетрије, и клизајуће рефлексије, где се центар ротације налази у тачки пресека хоризонталних и вертикалних оса симетрије



Сечењем папирних трака приказаних на Сликама 15, 16 и 17 обележивачи за књиге могу бити направљени користећи симетрије бордура. Свакако да можете дизајнирати свој сопствени обележивач у складу са жељеним симетријама. Могу бити направљени цртежи цртани слободном руком или се може користити неколико добро познатих компјутерских програма за једноставно дизајнирање симетрија бордура. Један од ових програма је, на пример Кали, који се може наћи на сајту <http://geometrygames.org/>, а његово преузимање је бесплатно.

Мебијусова трака и симетрије bordura

Штампањем образаца (Слика 15, 16 и 17) на провидном листу папира и формирањем цилиндричне површине или Мебијусове траке од папирних трака можемо да видимо да ли се образац наставља на исти начин у оба случаја (тј. да ли је образац „бесконачан“). Слика 5 приказује пример када се образац не наставља правилно на Мебијусовој траци, али се на Слици 6 наставља. Који обрасци бордура се могу савити тако да добијемо Мебијусову траку и сачувати при томе адекватно правило у складу са симетријом бордура на целој траци, а који не могу? Оштампајте сваки од седам образаца на провидном папиру (потребан је провидан папир тако да образац буде видљив са обе стране и тако показујући да је дебелина површине небитна), направите од њих Мебијусове траке и пронађите оне симетрије које групе симетрија бордура морају да садрже тако да дати образац може бити правилно стављен на Мебијусову траку (тј. да даје бесконачан циклични образац).



Слика 5: Симетрија бордура $1g$ на цилиндричној површини и на Мебијусовој траци



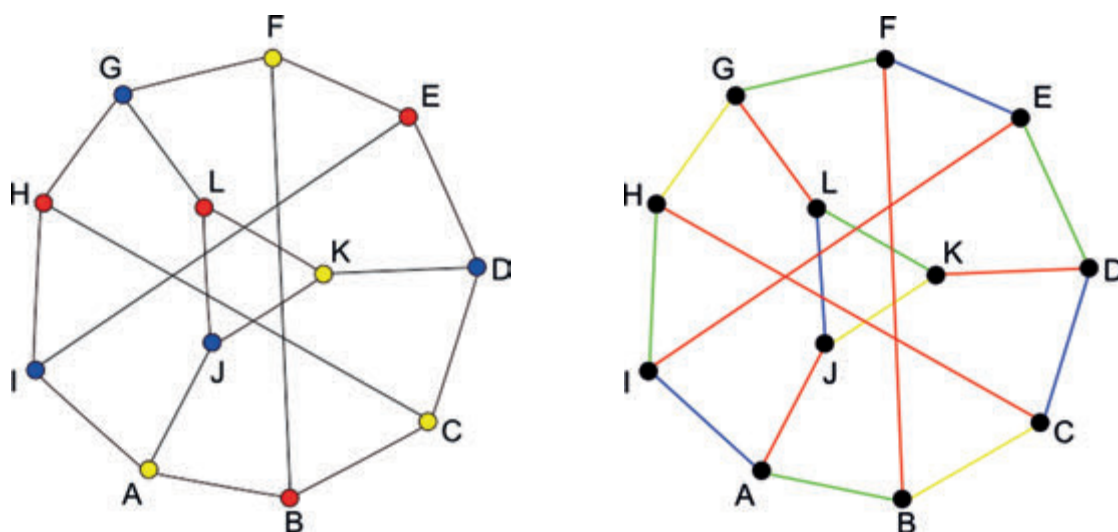
Слика 6: Симетрија бордуре tt на цилиндричној површини и на Мебијусовој траци

Референце:

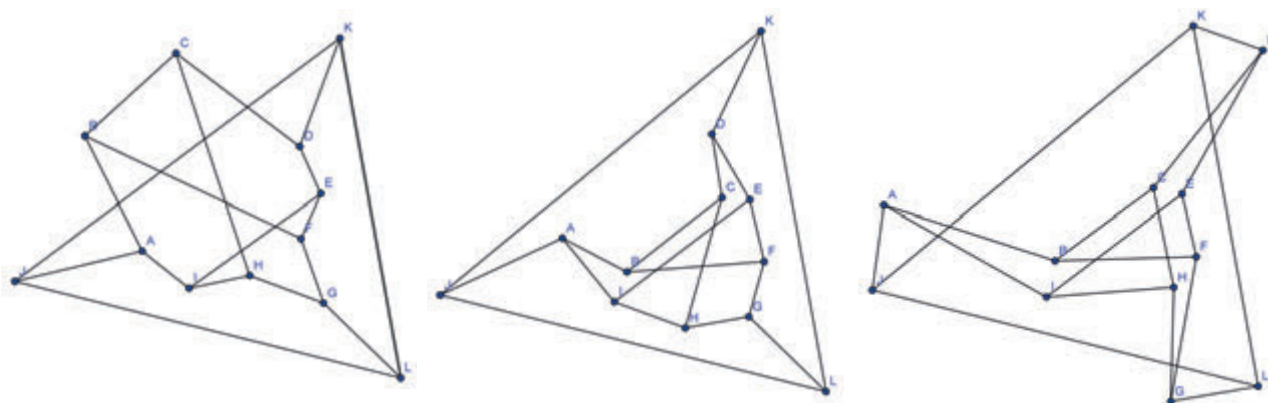
<http://mathworld.wolfram.com/TietzesGraph.html>

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Pogats_Ferenc/sor/sorfriz.html

Илустрације и слике:

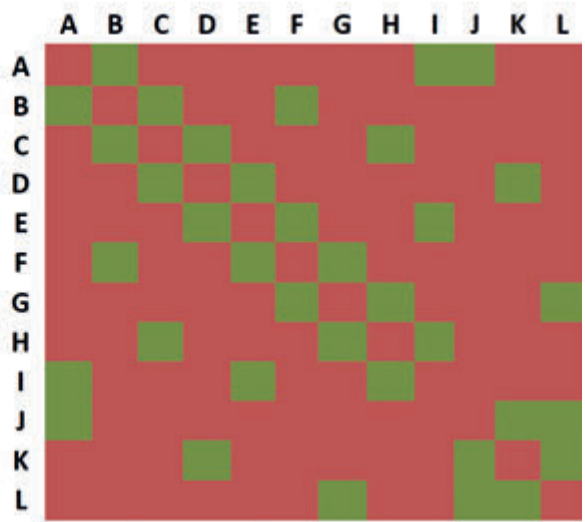


Слика 7: Илустрација хроматског броја и хроматског индекса графа



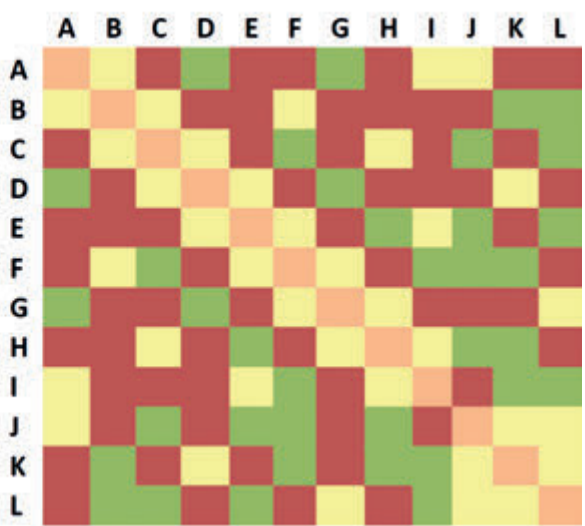
Слика 8: Неки изоморфни прикази Тицеовог графа конструисани у програму GeoGebra

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
B	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
C	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
D	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
E	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
F	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
H	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
I	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
J	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
K	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
L	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0



Слика 9: Матрица повезаности Тицеовог графа приказана бројевима и бојама

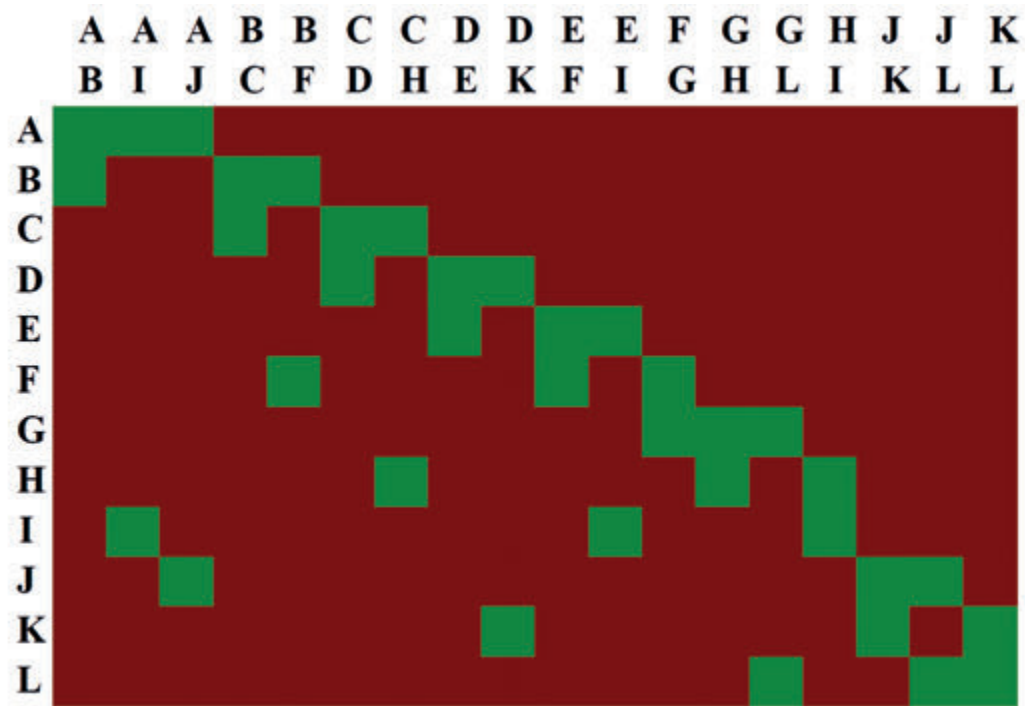
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	1	2	3	2	2	3	2	1	1	2	2
B	1	0	1	2	2	1	2	2	2	2	3	3
C	2	1	0	1	2	3	2	1	2	3	2	3
D	3	2	1	0	1	2	3	2	2	2	1	2
E	2	2	2	1	0	1	2	3	1	3	2	3
F	2	1	3	2	1	0	1	2	3	3	3	2
G	3	2	2	3	2	1	0	1	2	2	2	1
H	2	2	1	2	3	2	1	0	1	3	3	2
I	1	2	2	2	1	3	2	1	0	2	3	3
J	1	2	3	2	3	3	2	3	2	0	1	1
K	2	3	2	1	2	3	2	3	3	1	0	1
L	2	3	3	2	3	2	1	2	3	1	1	0



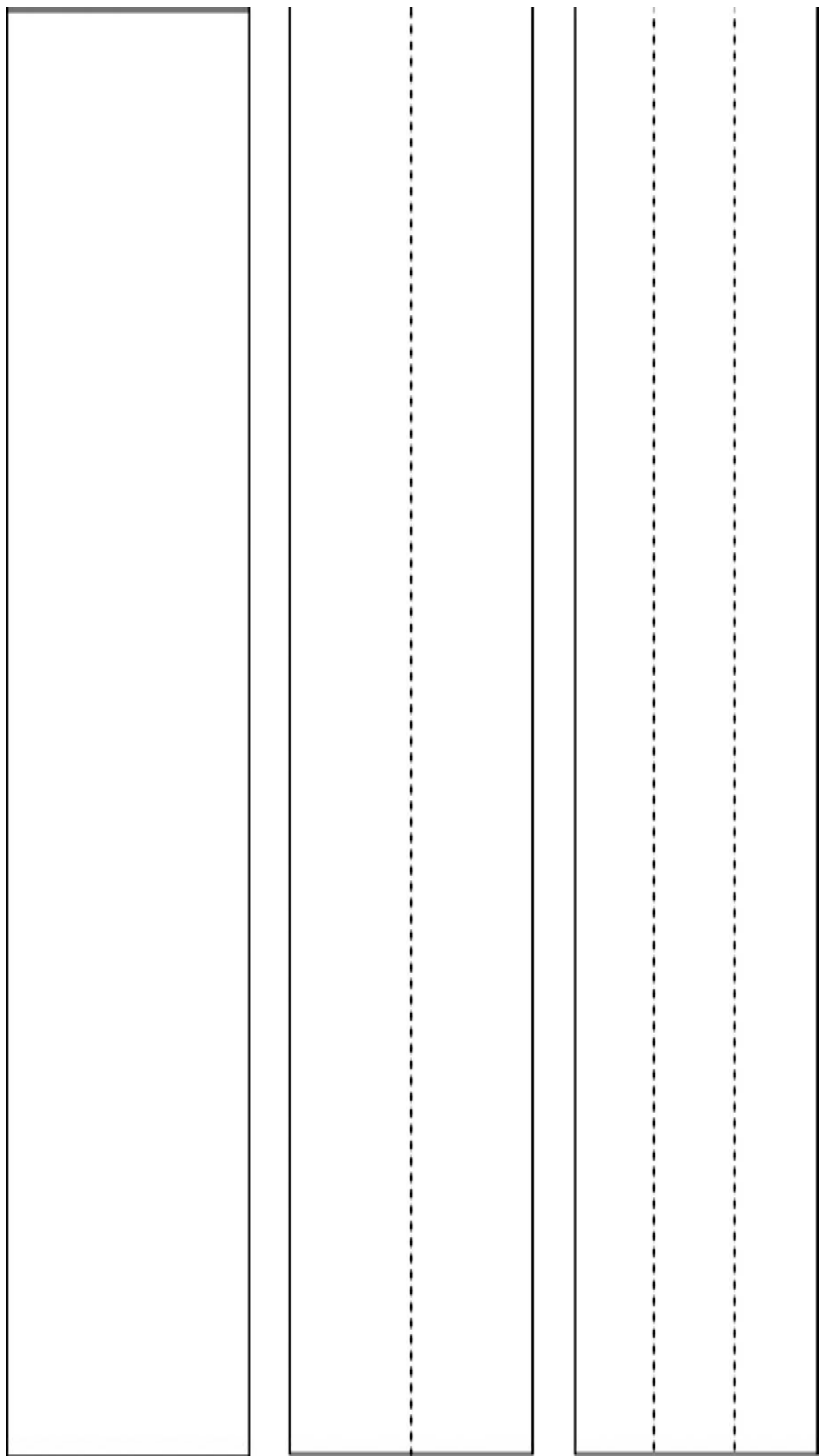
Слика 10: Матрица удаљености Тицеовог графа приказана бројевима и бојама

	A	A	A	B	B	C	C	D	D	E	E	F	G	G	H	J	J	K
	B	I	J	C	F	D	H	E	K	F	I	G	H	L	I	K	L	L
A	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
I	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
J	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
K	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1

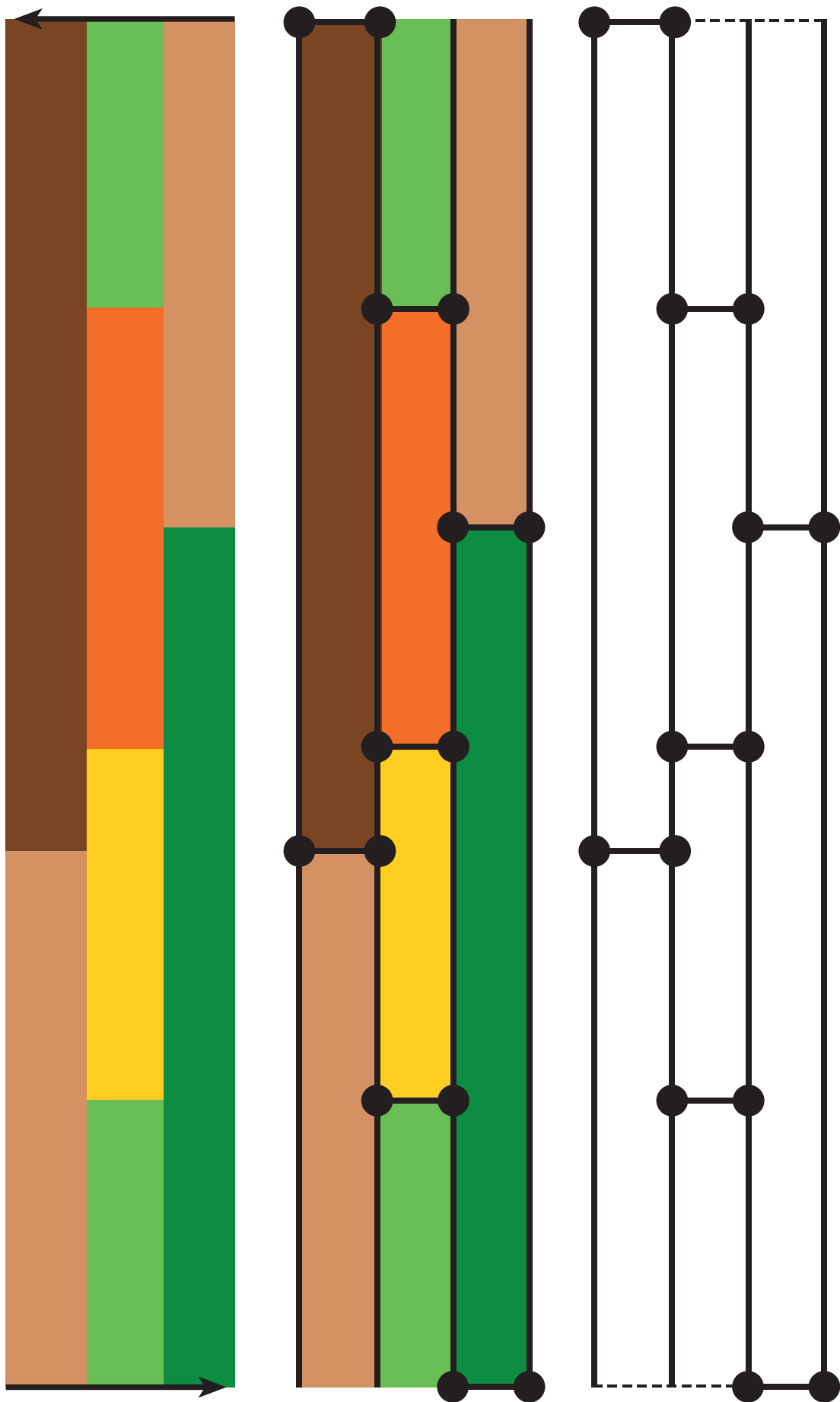
Слика 11: Матрица инциденције Тицеовог графа приказана бројевима



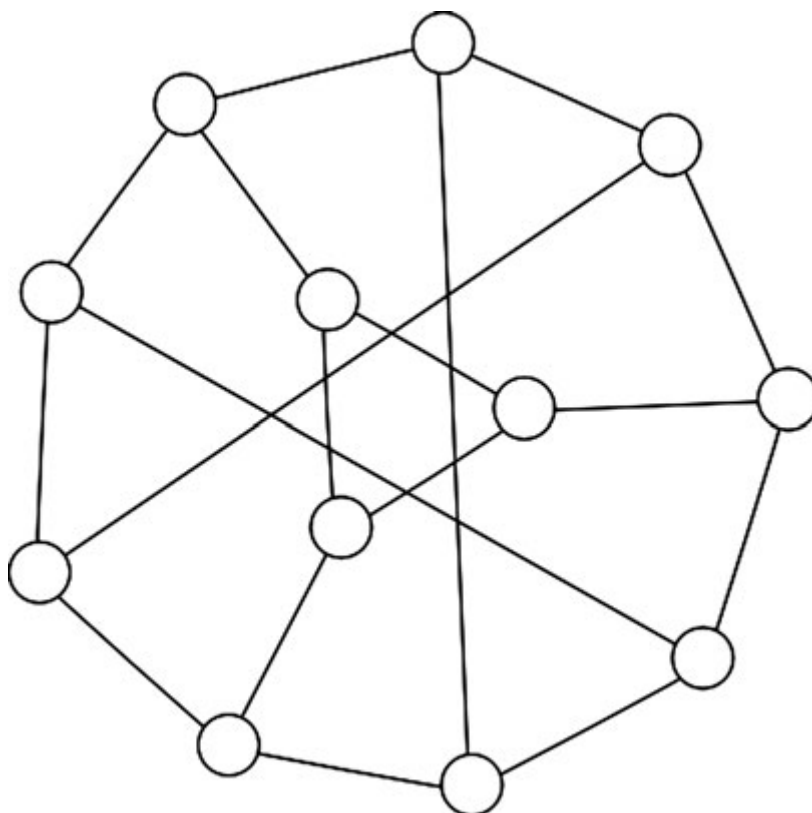
Слика 12: Матрица инциденције Тицеовог графа приказана бојама



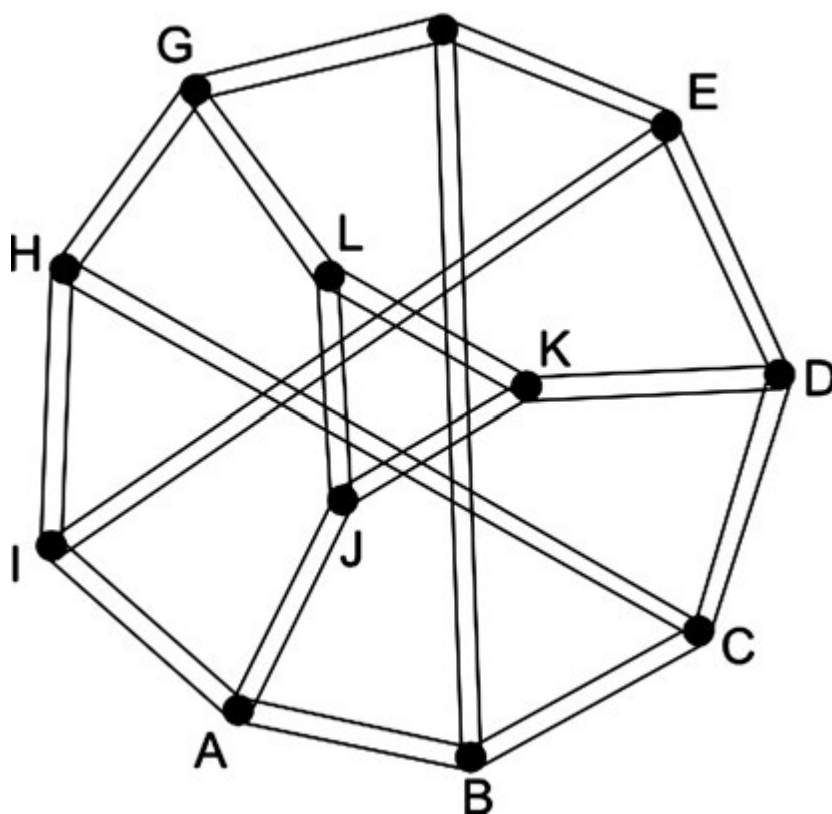
Слика 13: Мебијусова трака, сечење Мебијусове траке дуж средишње линије и дуж једне трећине њене ширине од ивице.



Слика14: Бојење мапе на Мебијусовој траци и Тицев граф на Мебијусовој траци



Слика 15: Шема за утврђивање хроматског броја Тицеовог графа



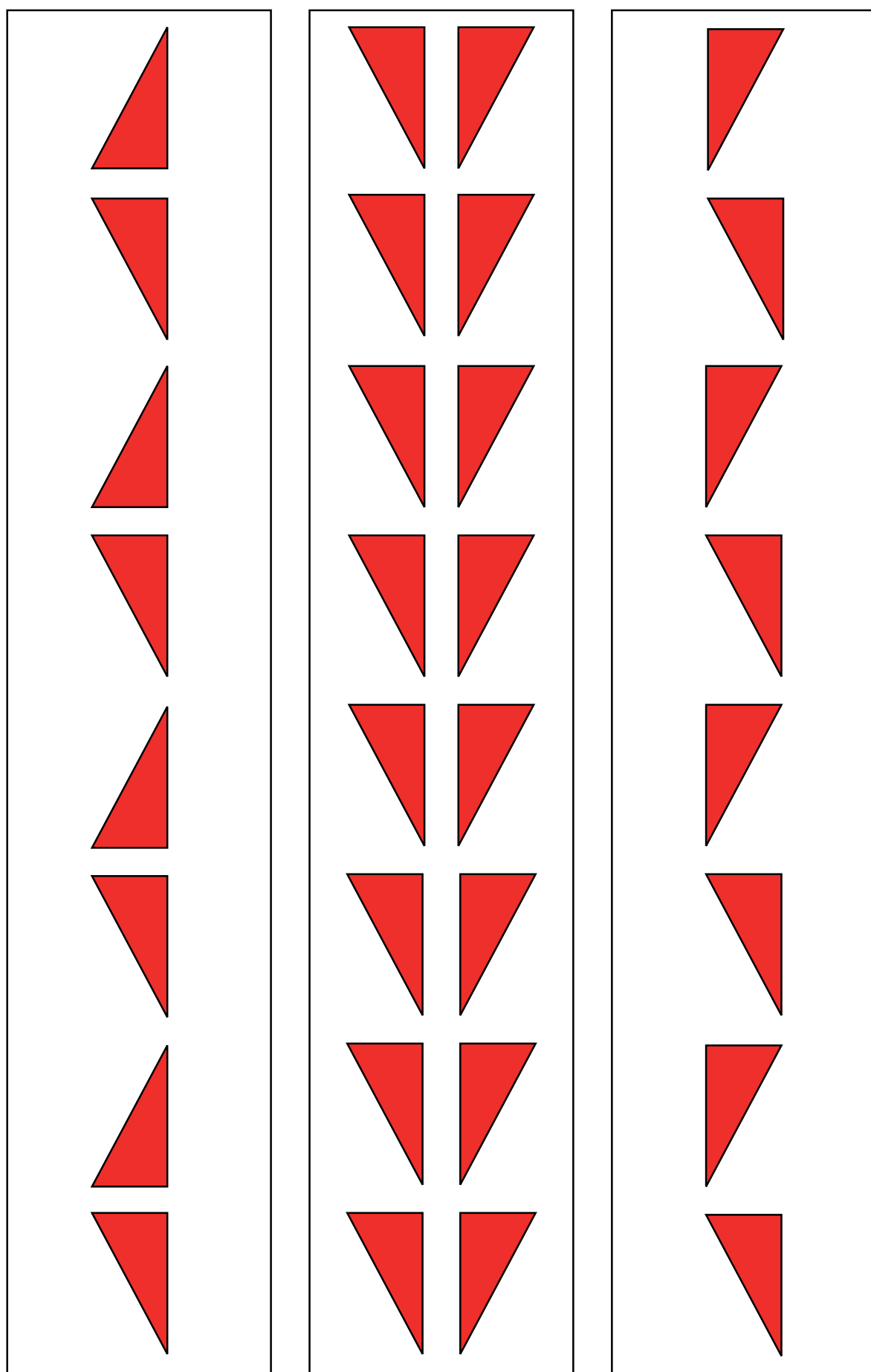
Слика 16: Илустрација за утврђивање хроматског индекса Тицеовог графа

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A												
B												
C												
D												
E												
F												
G												
H												
I												
J												
K												
L												

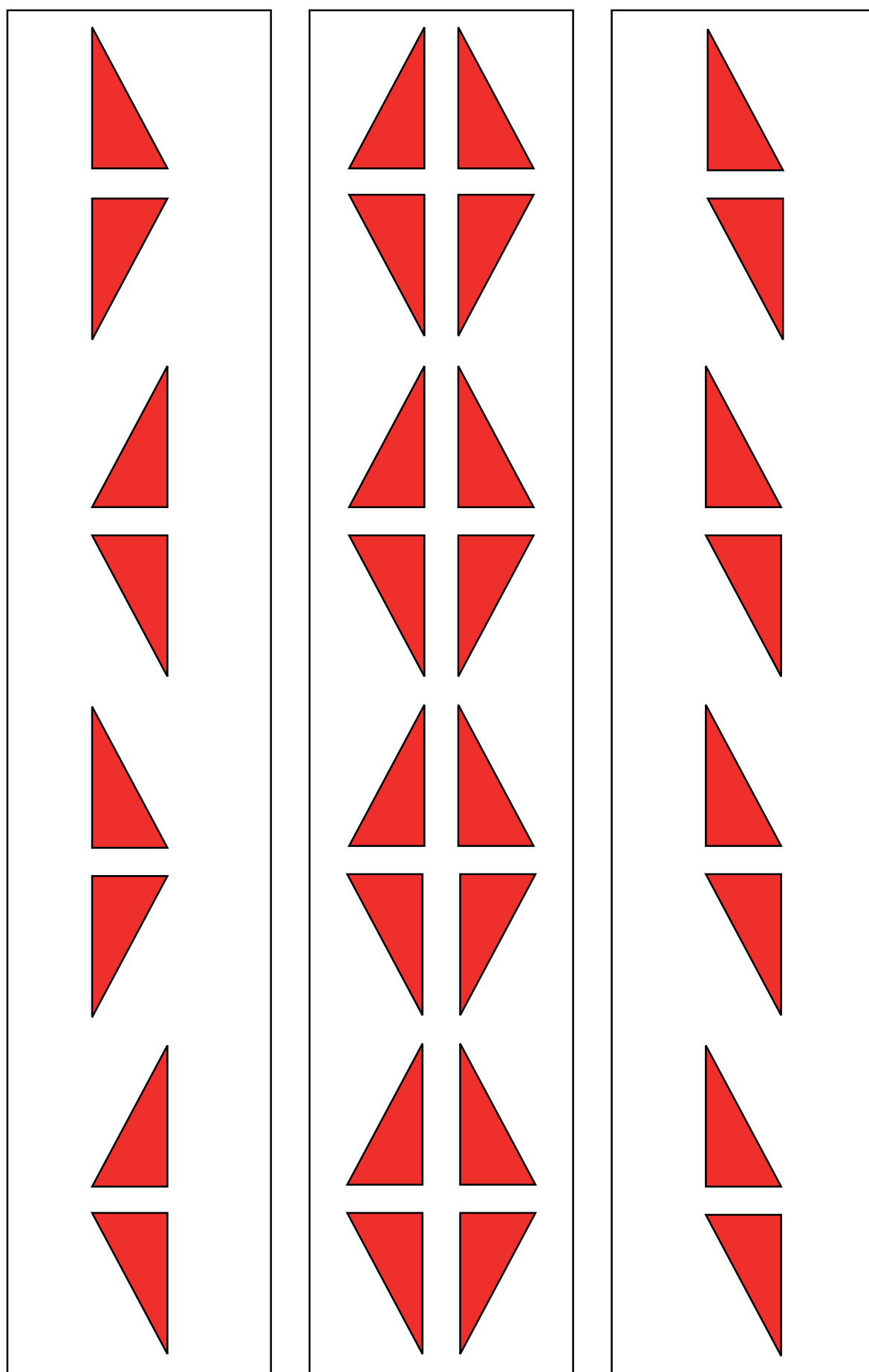
Слика 17: Табела за приказивање матрица повезаности и удаљености Тицеовог графа бројевима и бојама

	A B	A I	A J	B C	B F	C D	C H	D E	D K	E F	E I	F G	G H	G L	H I	J K	J L	K L
A																		
B																		
C																		
D																		
E																		
F																		
G																		
H																		
I																		
J																		
K																		
L																		

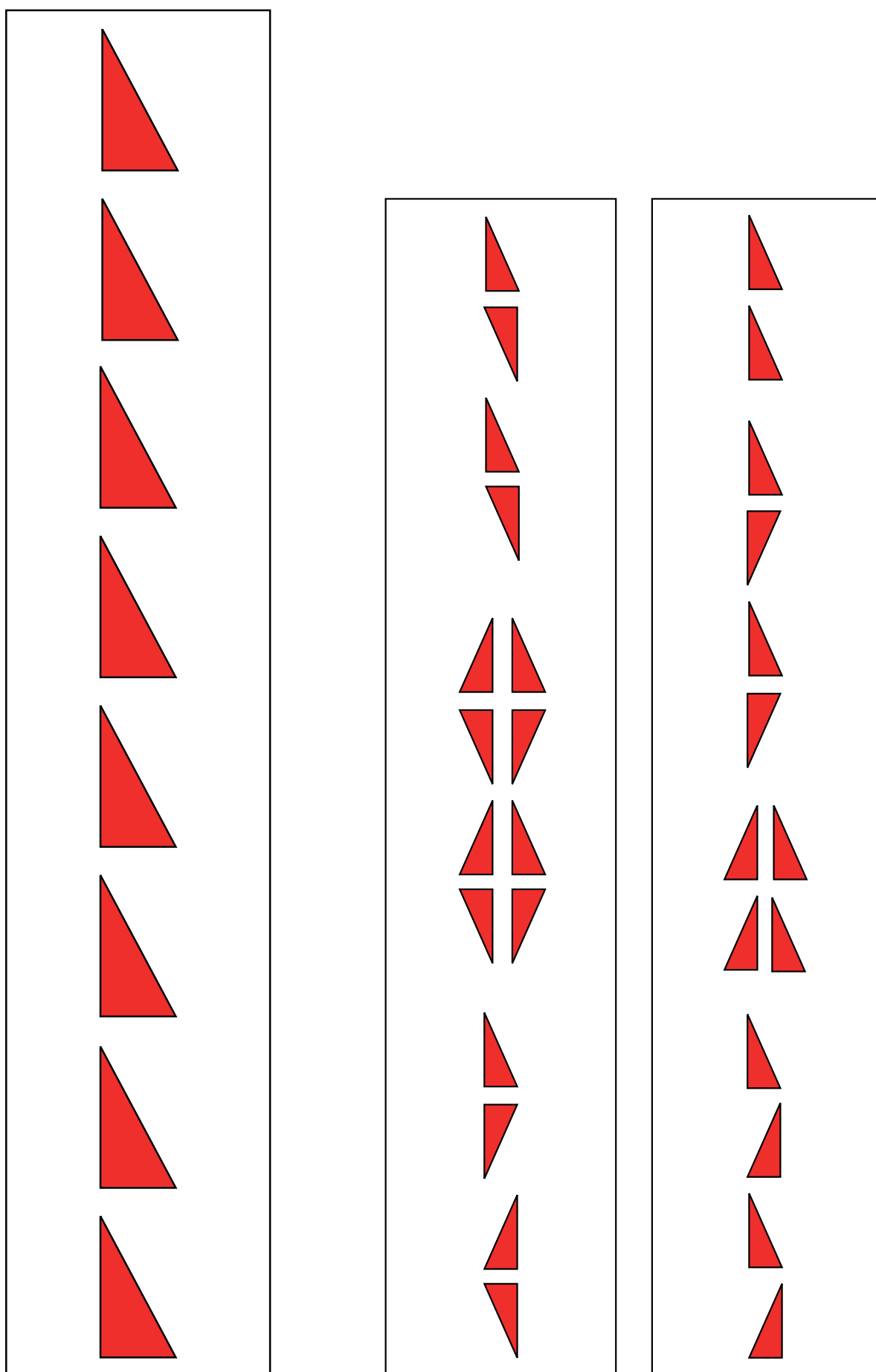
Слика 18: Табела за приказивање матрице инциденције Тицеовог графа бројевима и бојама



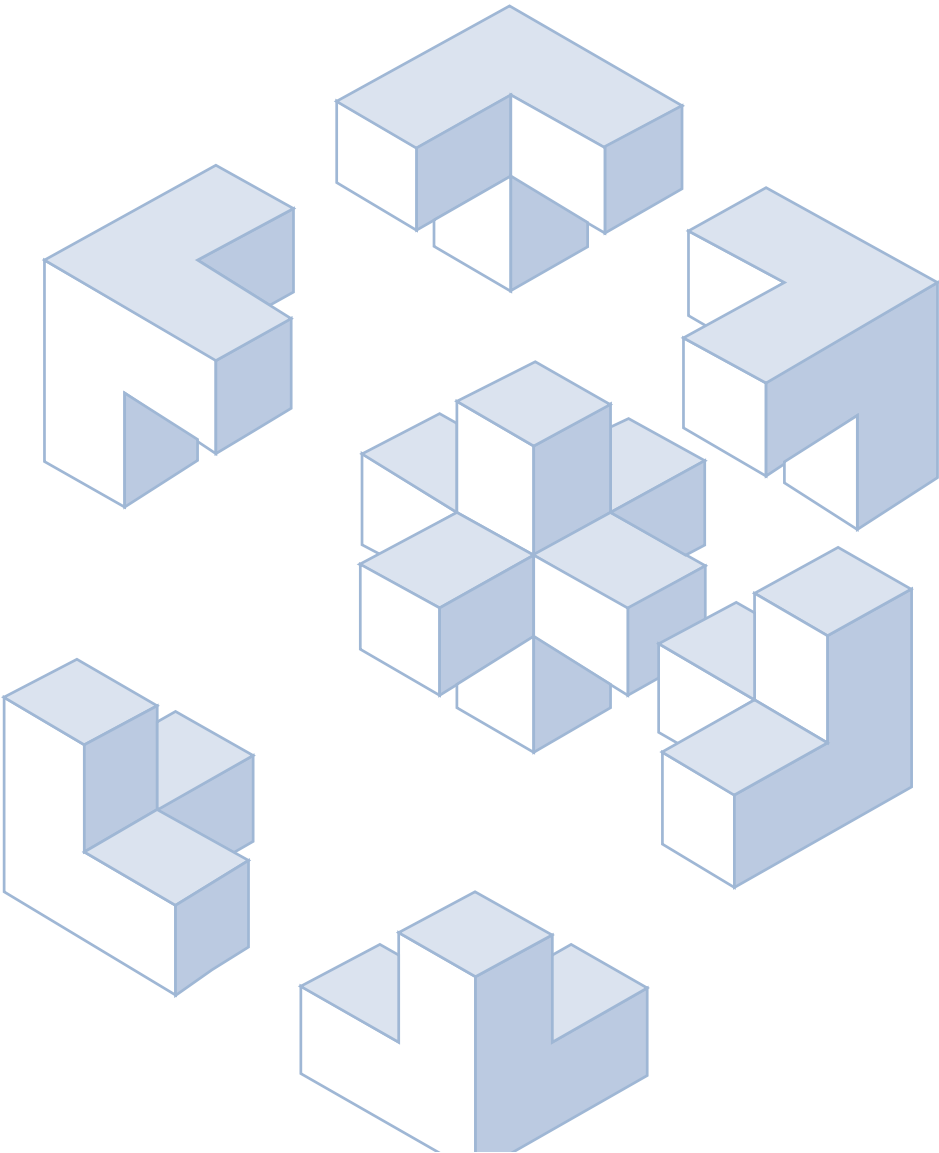
Слика19: групе симетрије бордура Ig , Im , mI



Слика 20: групе симетрије бордура mg , mm



Слика 21: Групе симетрије бордура на обележивачима за књиге



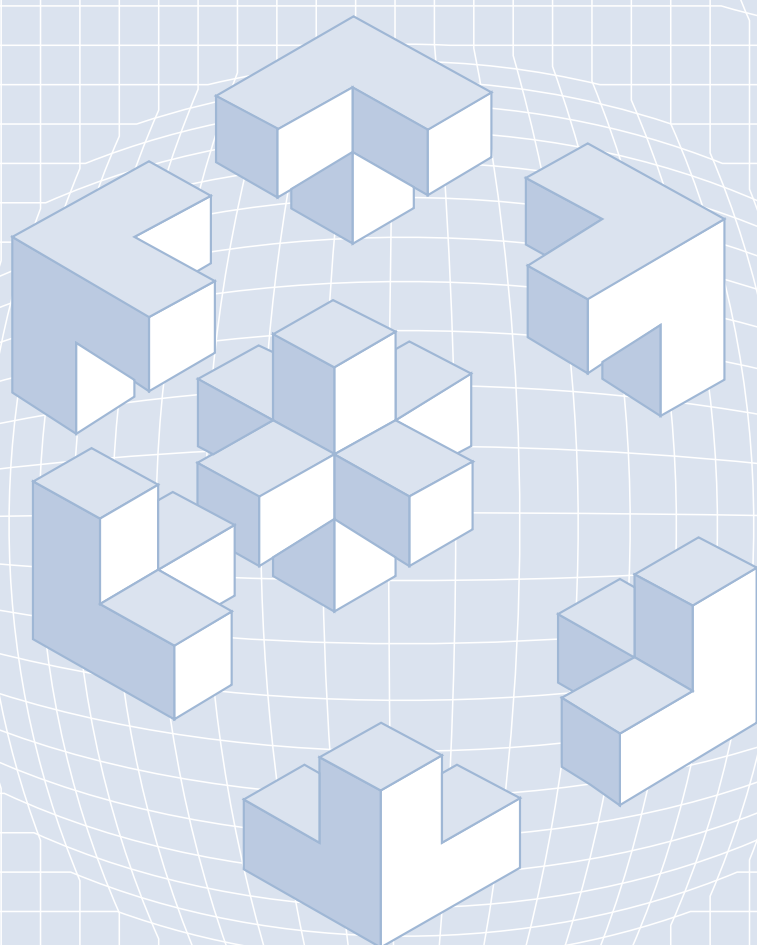


VISUALITY &
MATHEMATICS

EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

Џеј Бонер

Многоугаона техника у исламском геометријском дизајну



АРБЕСКЕ И КВАЗИКРИСТАЛИ

Џеј Бонер (Jay Bonner) је стручњак у области исламског архитектонског орнамента и признати ауторитет у области методологије исламског геометријског дизајна. Његови многи пројекти укључују рад на Великој џамији у Меки, и проширење Посланикове џамије у Медини у Саудијској Арабији. Држао је многе семинаре и предавања на тему методологије исламског геометријског дизајна, у Европи, САД, Мароку и Турској. Његове публикације о методологији дизајна су доступне за бесплатно преузимање из архиве Bridges Math and Art на адреси: <http://archive.bridgesmathart.org>.

Џеј Бонерову књигу о методологији исламског геометријског дизајна и историјског развоја тренутно штампа издавачка кућа „Спрингер Верлаг“ и појавиће се у продаји почетком 2015. Примери његовог рада се могу видети на његовом сајту: www.bonner-design.com.



Увод у активности

Исламски геометријски дизајн је посебно софистициран визуелни израз математичких принципа. Муслимански уметници су били иноватори конструкција нових облика попуњавања дводимензионе равни све сложенијим шарама, које су укључивале не само изометријске кристалографске симетрије са ротацијама реда 1,2,3,4 или 6, већ и локално симетричне (апериодичне) симетричне системе са локалним ротацијама реда 5 или 7. У периоду од 14. и 15. века настале су исламске геометријске конструкције које су испуњавале модерне математичке критеријуме само-сличности.

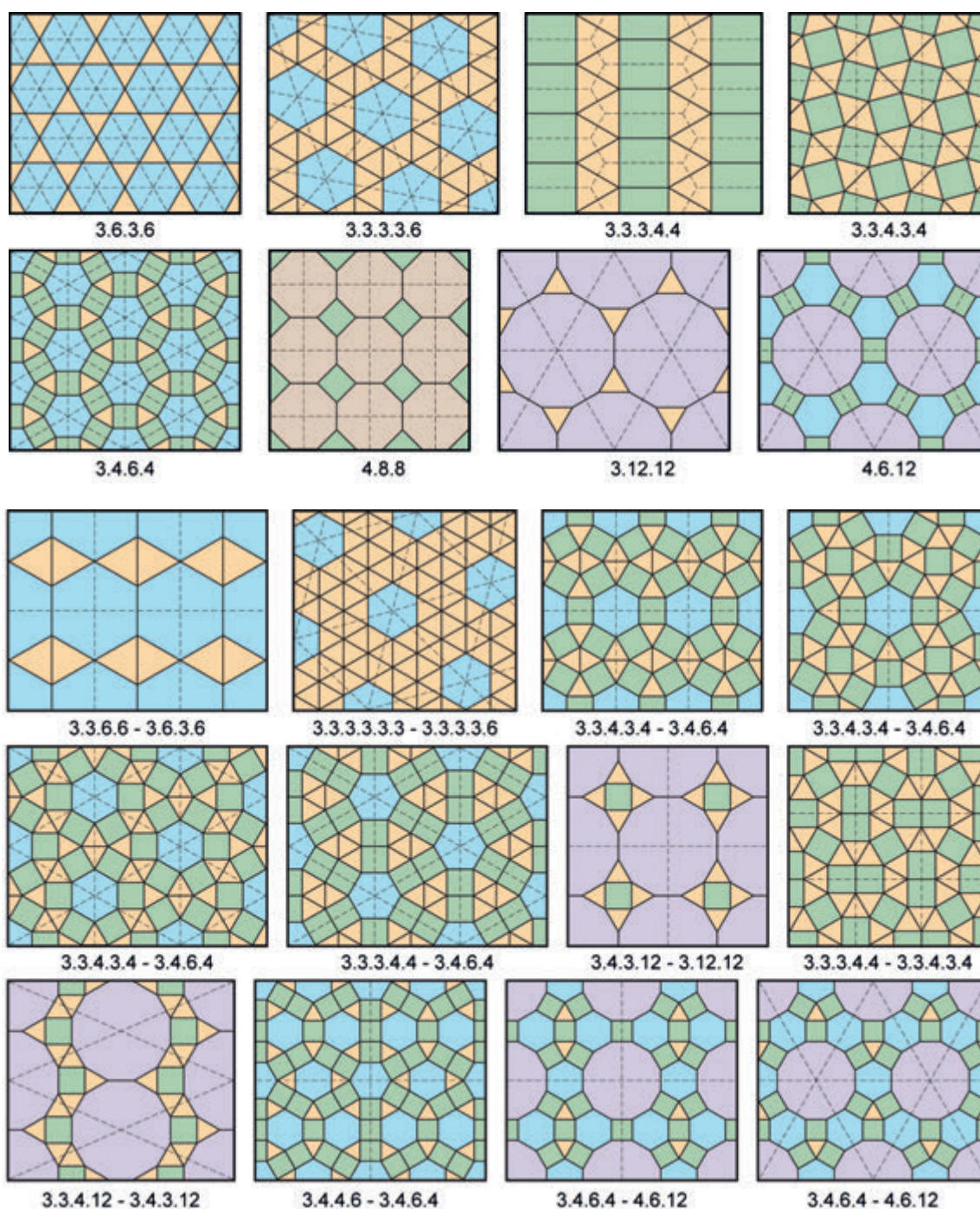
Главни метод стварања исламских геометријских шара била је многоугаона техника. у При изради неког дизајна она користи кључне тачке на некој многоугаоној теселацији. Након што се орнамент заврши, бришу се линије које одговарају многоугаоној теселацији (поплочавању) и оставља само новодобијени геометријски дизајн. Пошто теселација не чини део завршеног геометријског орнамента, она се назива основна теселација. Изградња већине геометријских шара подразумева постављање система унакрсних линија шара у средишима ивица многоуглова у оквиру дате теселације. У зависности од угла унакрсних линија, постижу се различите естетске карактеристике. Различите конвенције за постављање унакрсних линија су довеле до развоја четири фамилије дезена који су незаобилазне у овој традицији.

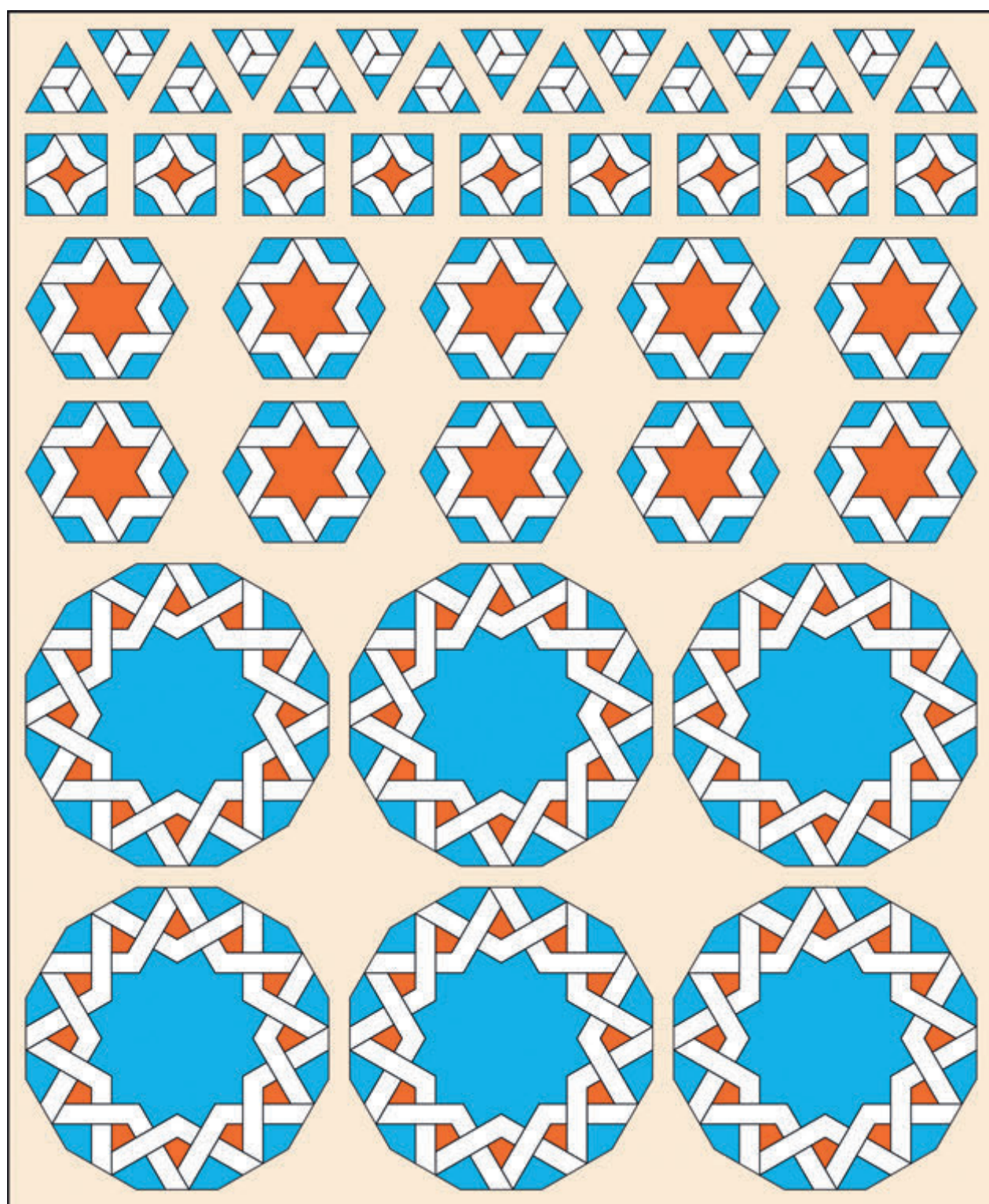
Постоје два типа орнамената насталих из многоугаоне технике: систематски и несистематски. Основне теселације несистематских шаблона се састоје од правилних и неправилних многоуглова који функционишу заједно у једном јединственом распореду. Они се не могу поново састављати у другим теселацијама. Насупрот томе, основне теселације систематских шаблона се састоје од ограниченог скупа многоуглова који се могу састављати у неограниченом броју различитих комбинација. Постоји пет различитих система који су се користили у историји исламске орнаментике: (1) систем правилних многоуглова; (2) 4-оструки систем А; (3) 4-оструки систем Б; (4) 5-оструки систем; и (5) 7-оструки систем. Сваки од њих има своје сопствене геометријске карактеристике и естетске квалитете, и сваки од њих је карактерише огромна разноврсност и лепота дизајна. Следеће активности су засноване на три од ових систематских типова дизајна.

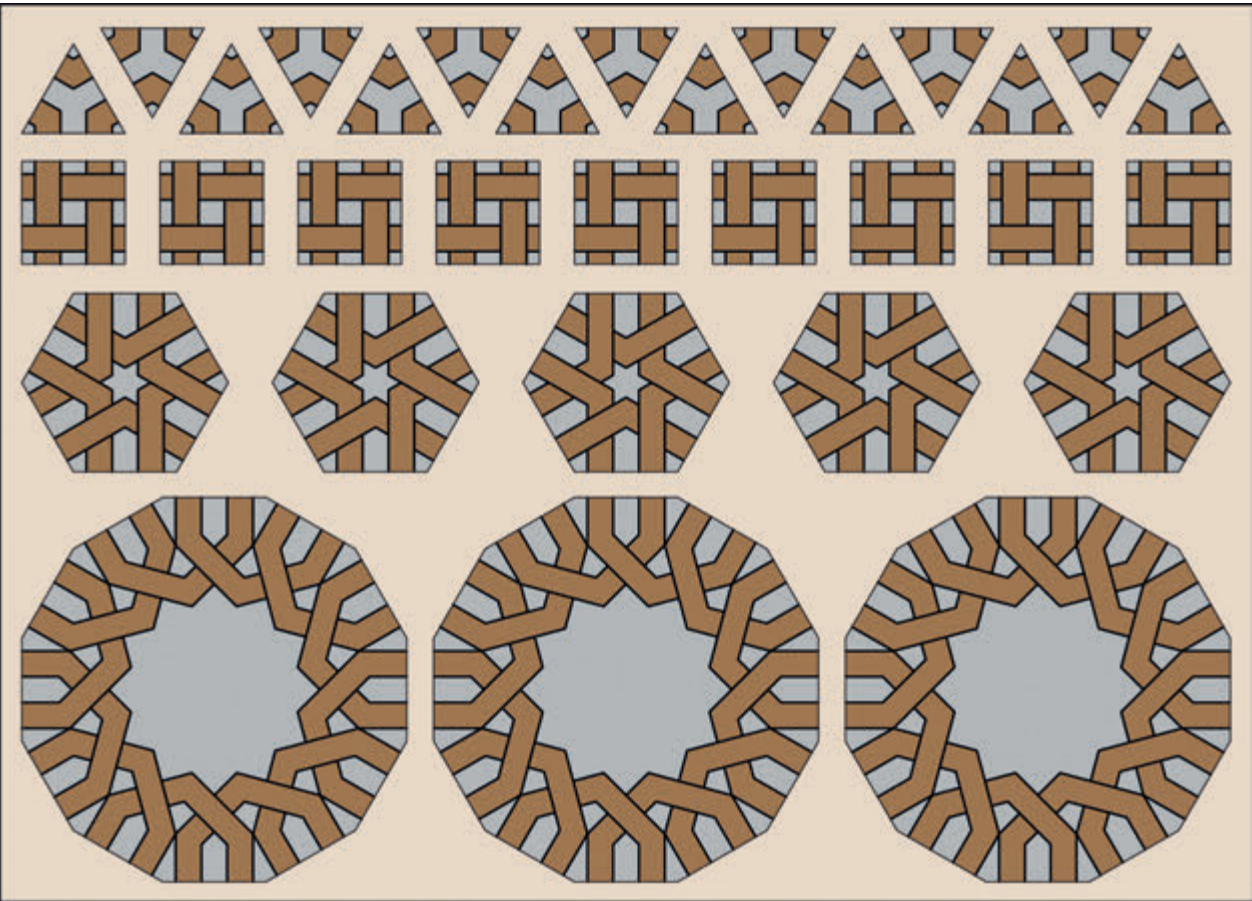
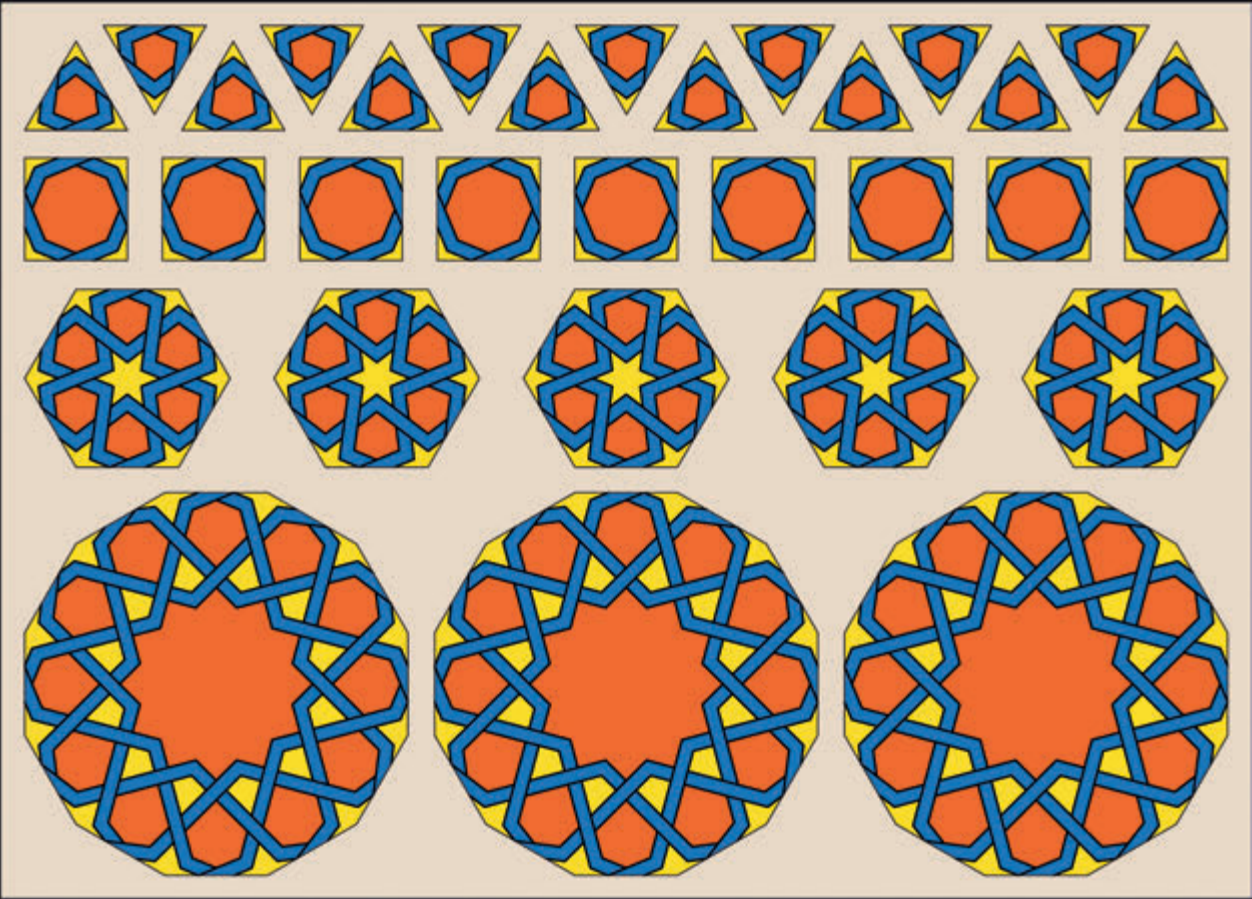
Активност 1 – Систем правилних многоуглова:

Као што име сугерише, систем правилних многоуглова се састоји од правилних многоуглова. Илустрације испод приказују осам полу-регуларних теселација, као и избор од дванаест деми-регуларних (полиморфне) теселација. Полу-регуларне теселације имају више од једног типа многоуглова и имају идентична темена, док деми-регуларне (полиморфне) теселације имају више од једног типа многоуглова и два типа темена. Обе врсте теселација дају веома интересантне геометријске орнаменте у свакој од три фамилије дезена.

У овој активности, претходно украшени многоугли се комбинују како би створили атрактивне геометријске орнаменте. Постоје три скупа многоуглова. Први дају орнаменте са оштрим угловима, други орнаменте са тупим угловима, а трећи дају орнаменте засноване на 2 тачке које деле сваку ивицу. Корак 1: направити неколико фотокопија у боји ове и следећих страница. Корак 2: пажљиво исећи многоугле маказама. Напомена: треба користити чвршћи папир (картон). Корак 3: саставите исечене многоугле у геометријске шаре користећи полу-регуларне и деми-регуларне теселације са претходне странице. Испробајте различите комбинације. Корак 4: када пронађете дезен који вам се допада, многоугле можете залепити на други комад папира.

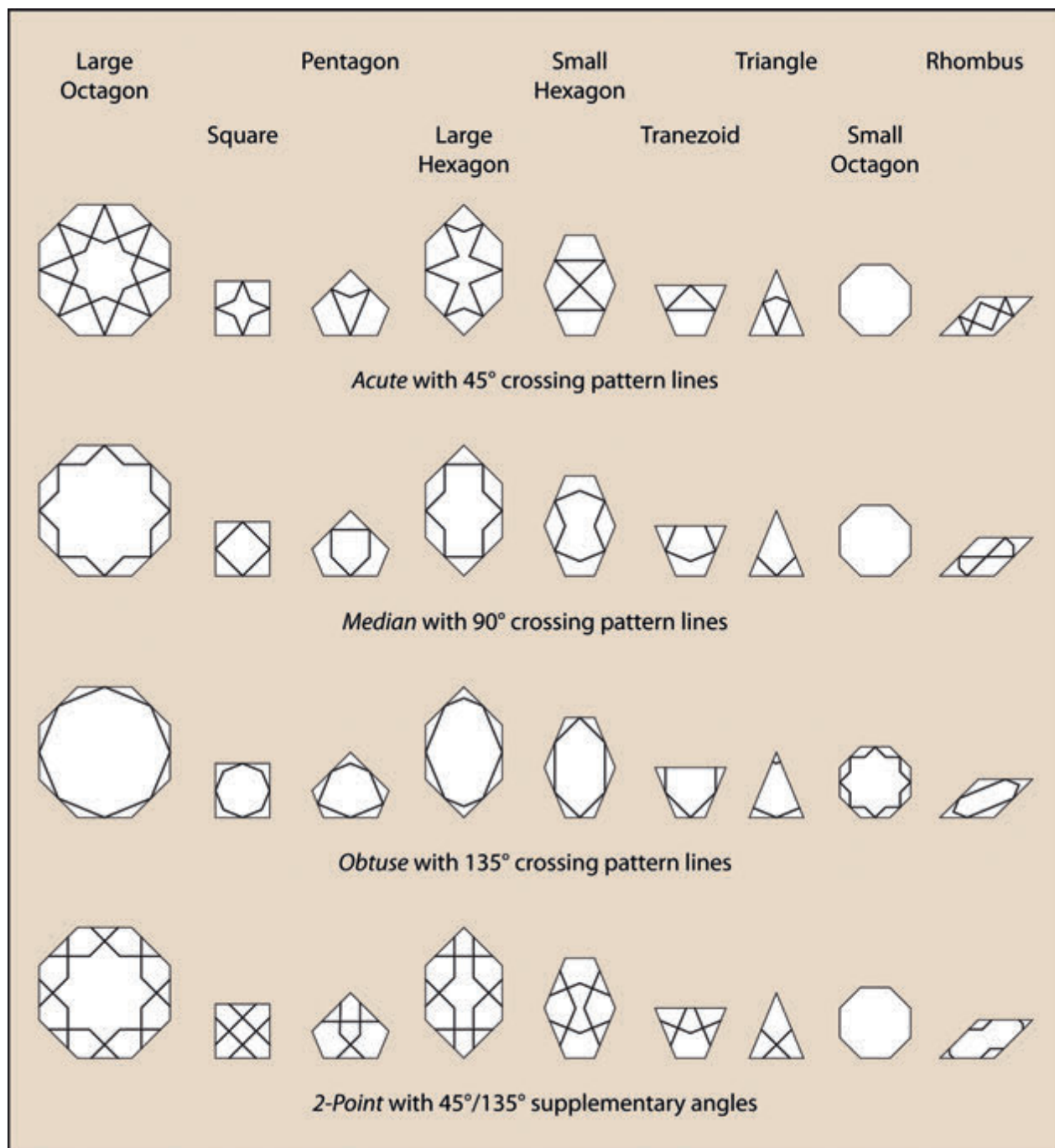




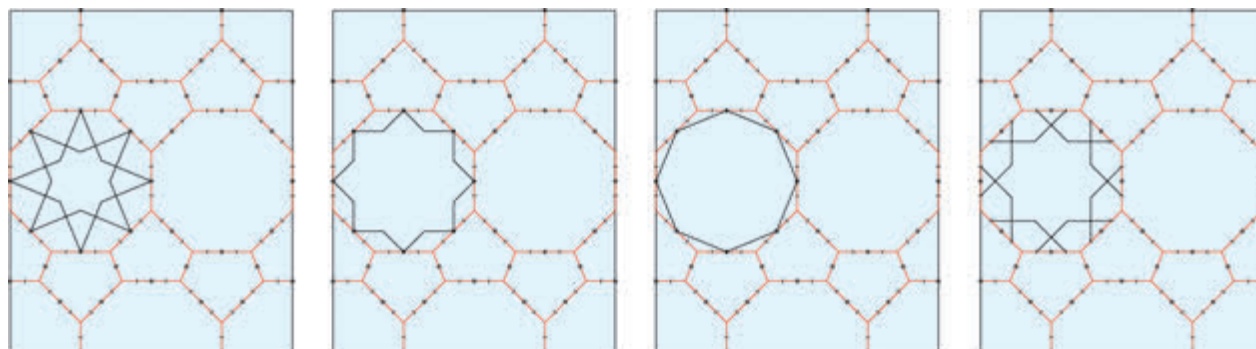


Активност 2 – Четвороструки систем А:

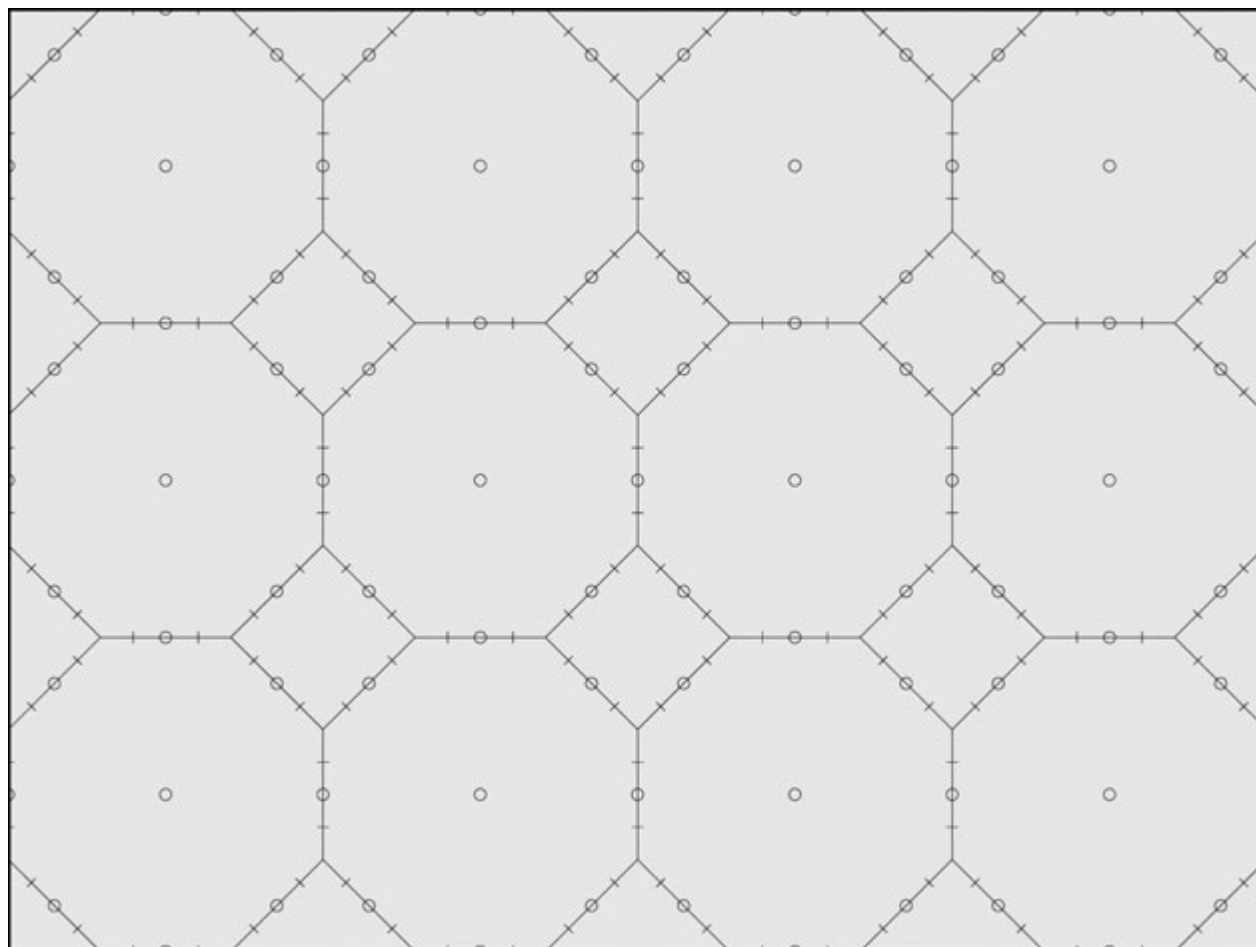
Многоугаони елементи који се користе у овом систему дају орнаменте са ротацијама реда 4. Генерално, ови орнаменти се састоје од имају квадратних јединица које се понављају, али се понекад такође наилази и на ромбска, правоугаоничка, нерегуларна шестоугаона и радијална понављања. Четири фамилије дезена се примењују на многоугаоне елементе приказане доле. Примарни многоугао у овом систему је осмоугао. Шаблон линија из фамилије дезена са оштрим угловима се конструише цртањем линија које спајају средиште једне ивице осмоугла са средишњом тачком треће ивице у низу. Ово ствара звезду са угловима од 45° степени. Линије која повезују сваку другу средишњу тачку одређују углове од 90° у оквиру фамилије шаблона средишњих углова. Угао у оквиру фамилије дезена тупих углова у овом систему је 135° и добија се повезивањем суседних средишњих тачака у низу. Линије треће фамилије дезена повезују сваку другу ивицу, али полазе из двеју тачака сваке ивице. Обратите пажњу како многоугаони елементи имају два типа дужина ивица. То чини процес теселације занимљивијим.



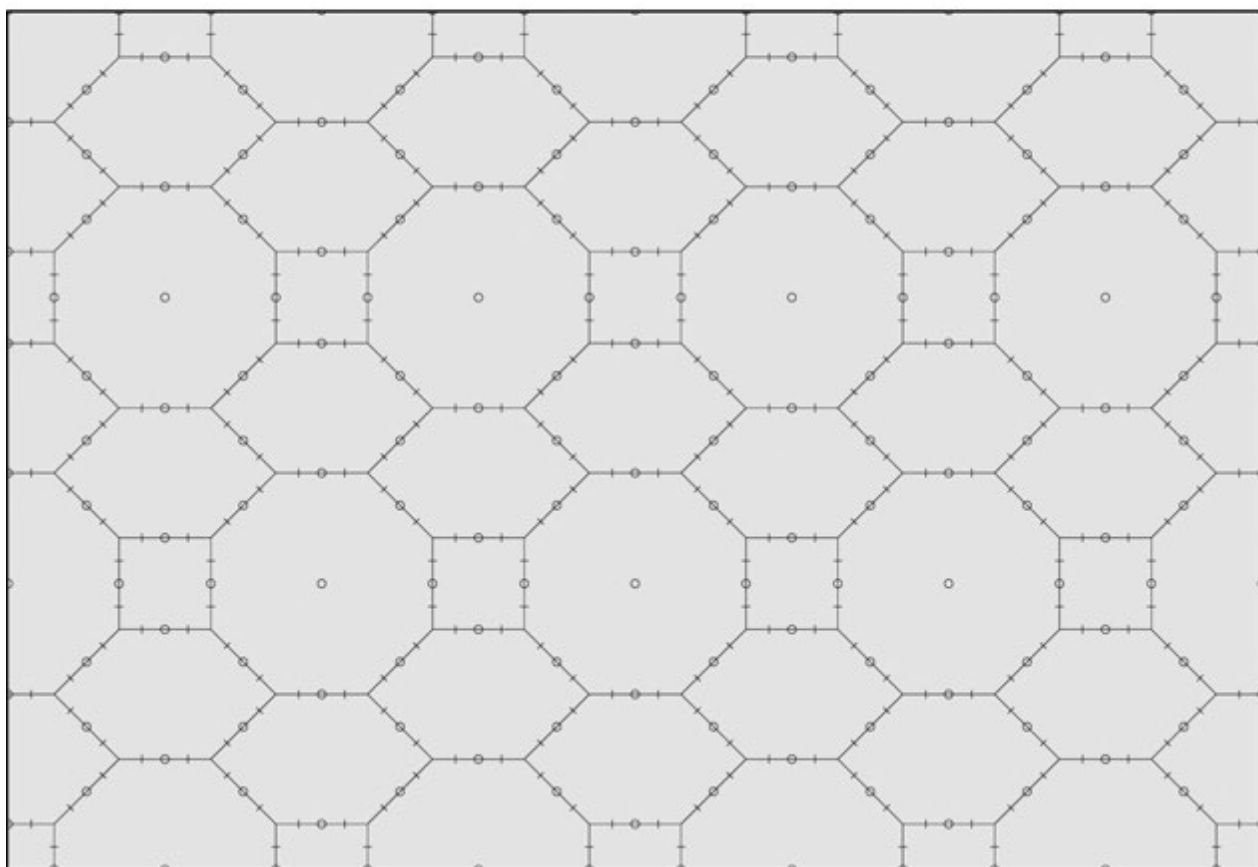
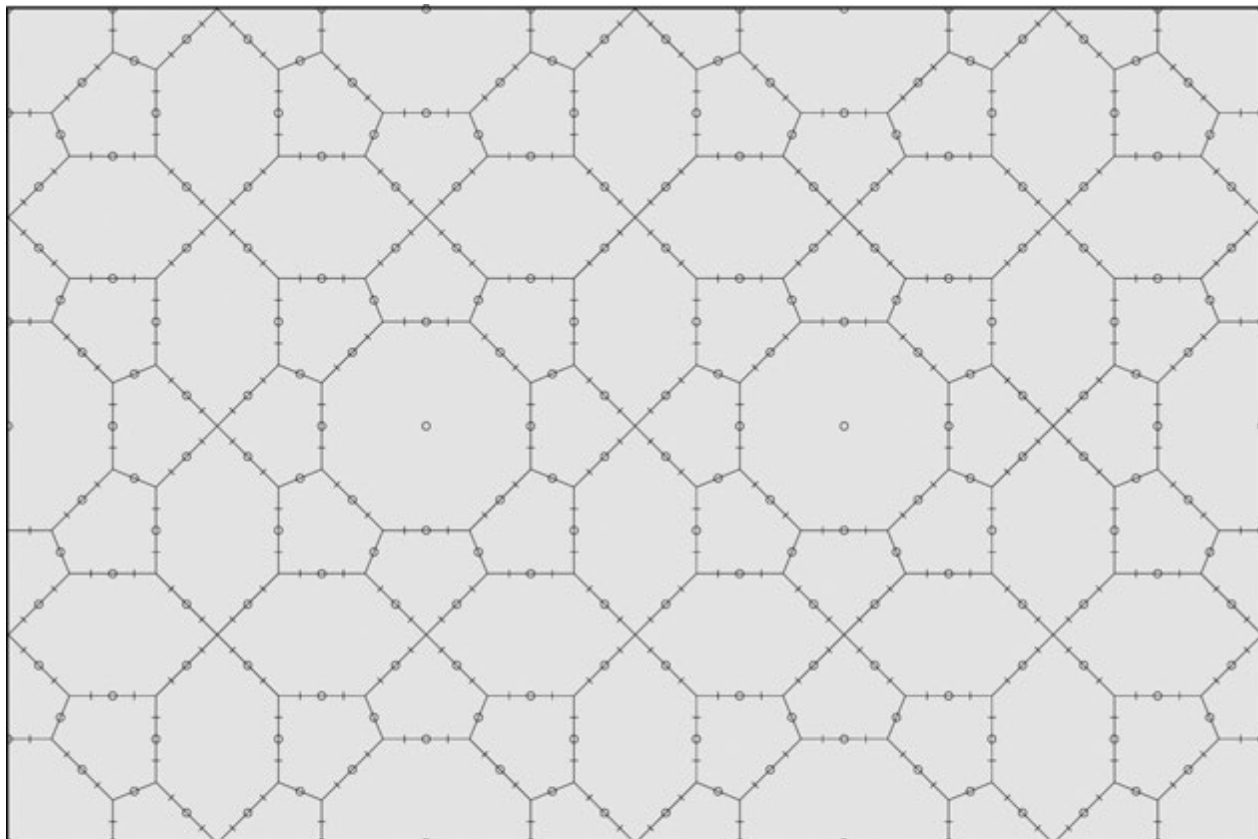
У овој активности, линије шаблона нацртане су на датим основним теселацијама. Да би се олакшао поступак конструкције, маркери тачака средишњег шаблона и шаблона са 2 тачке су уцртани на свакој ивици. Корак 1: направите четири фотокопије ове стране и следеће стране са датим теселацијама. Корак 2: као практичну вежбу, попуните линије шаблона у прве четири теселације приказане испод. Корак 3: користећи претходну слику као водич, подебљајте линије орнамента на сваој од датих основних теселација у свакој од четири фамилије дезена. Напомена: корисно је почети са цртањем линија (дела будућег орнамента) унутар осмоугла и онда продужити линије ван осмоугла, у суседне многоугле. Корак 4: обојите орнаменте у циљу постизања веће визуелне допадљивости.



Теселација 4.8.8 приказана испод је једна од најчешће коришћених основних (генеришућих) теселација коришћених за прављење исламских дезена. Ова мрежа осмоуглова и квадрата даје низ веома лепих дезена. Када сте завршили прављење шаблона у свакој од четири фамилије дезена са овом основном теселацијом, онда можете експериментисати са својим варијацијама на овим дезенима. Додатне варијације дезена су битан елемент ове традиције дизајна.



Ове две основне генеришуће теселације дају веома интересантне геометријске орнаменте у свакој од четири фамилије дезена. Горња теселација се понавља на ортогоналној мрежи. Пример испод је необичан по томе што је понављање ромбско, тј. засновано на ромбској раванској решетки. Да ли можете да пронађете ромбске јединице које се понављају и препознате ромбску решетку?

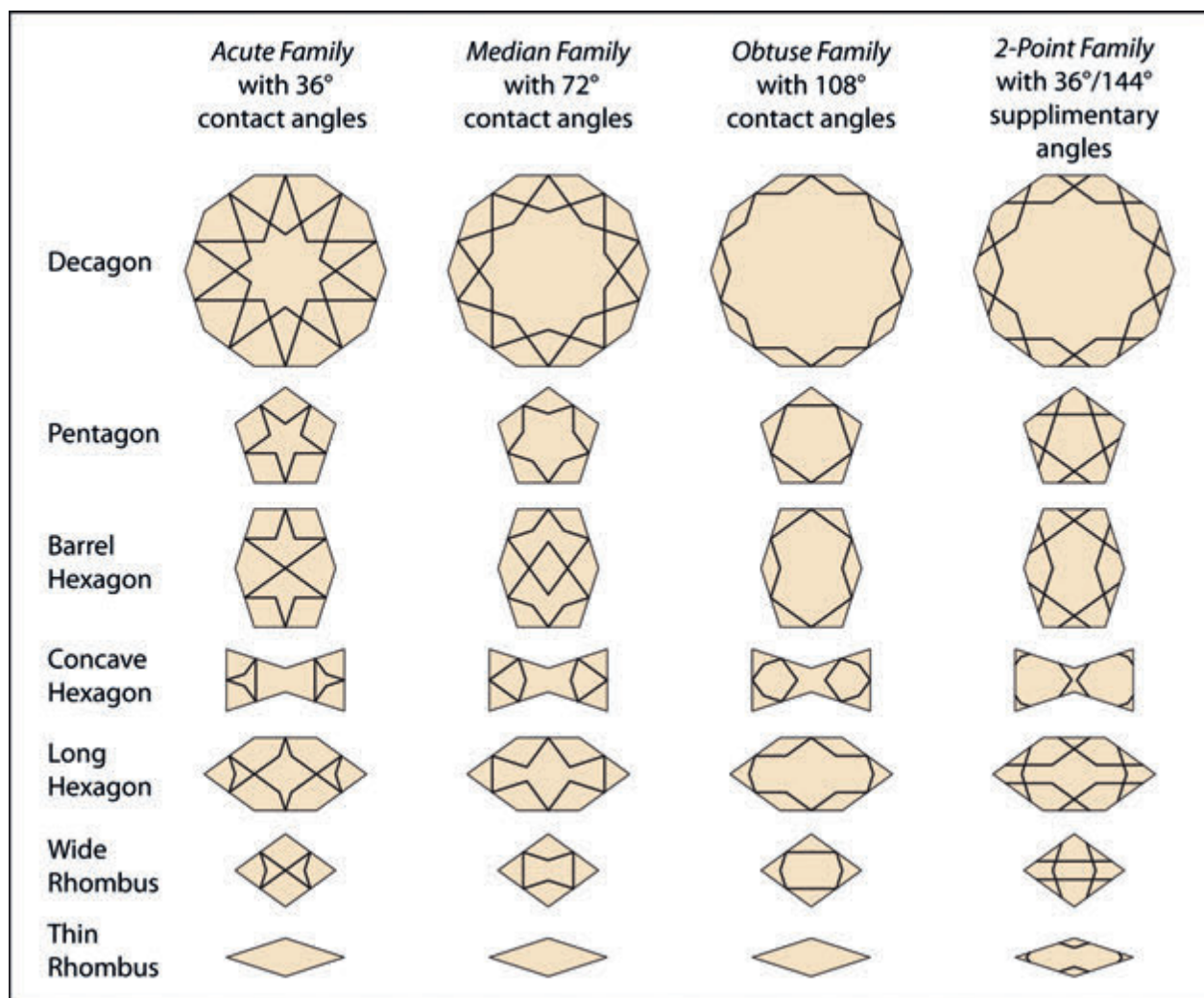


Активност 3 – Петороструки систем:

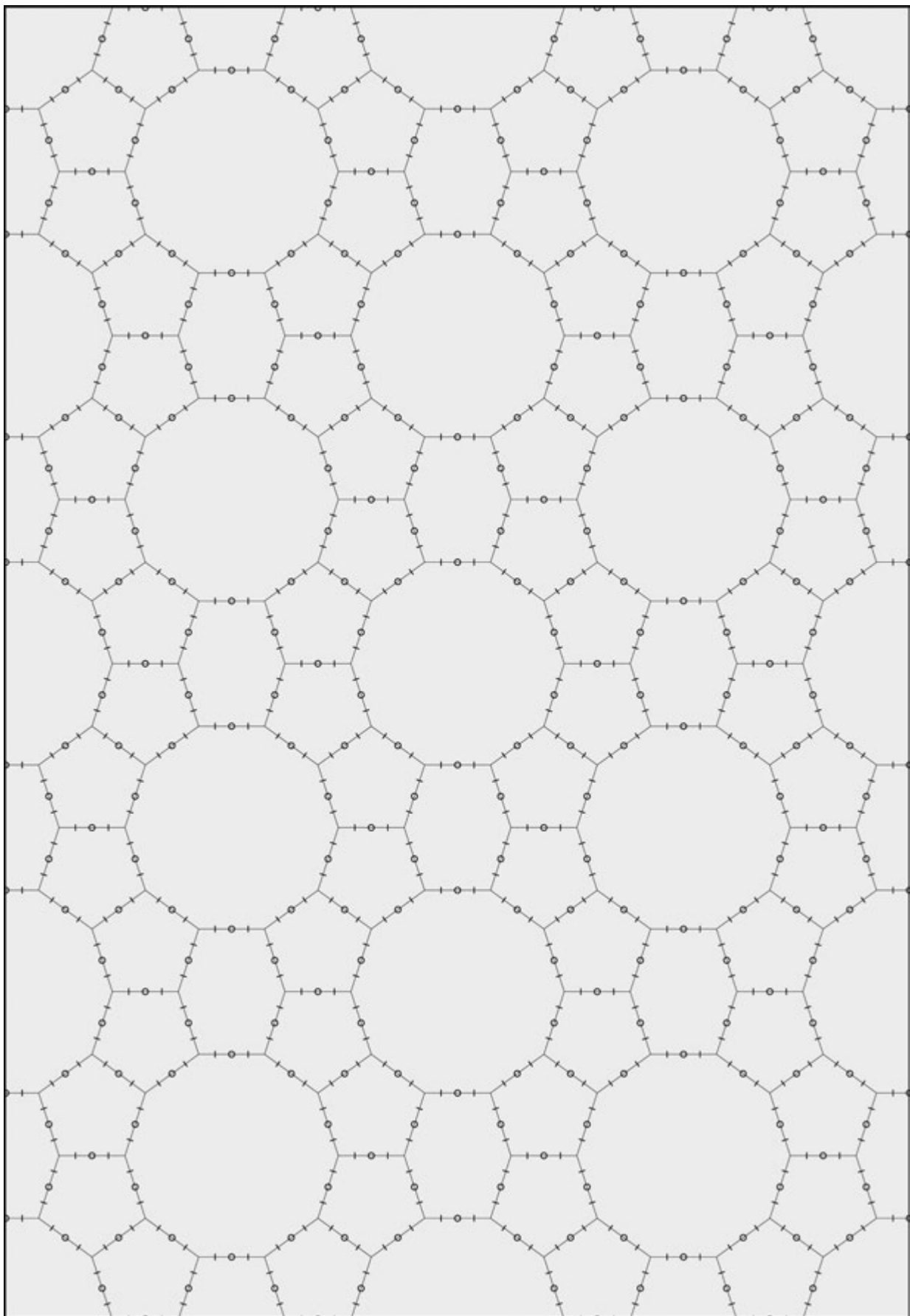
Дезени креирани од петоструког система (система са локалним ротационим симетријама реда 5) једни су од међу најпопуларнијих у исламском свету. Примарни многоугаони елементи 5-оструког система су правилни десетоугао и правилни петоугао. Претходно украшени елементи приказани на слици испод су најчешће коришћени многоугли, али такође постоје и други. Цртање линија које спајају средишне тачке једне ивице десетоугла са четвртом средишном тачком у низу одређује унакрсне линије шаблона са углом од 36° фамилије дезена оштрих углова. Углови од 72° фамилије дезена средишњих углова, добијени су спајањем средишњих тачака, при чему се прескачу три ивице, а они из фамилије дезена тупих углова прескакањем двеју ивица. Обрасци са 2 тачке такође су добијени прескањем двеју ивица, али користе две полазне тачке на свакој ивици многоугла. Сваки од ових типова шаблона даје веома лепе геометријске орнаменте.

Активност 3А - Корак 1: направити четири фотокопије теселације са следеће странице. Корак 2: користећи илустрацију испод као упутство, исцртајте линије шаблона на фотокопираној основној теселацији за сваку од четири фамилије дезена. Када завршите исцртавање, обојите добијени орнамент у циљу повећања његове визуелне допадљивости.

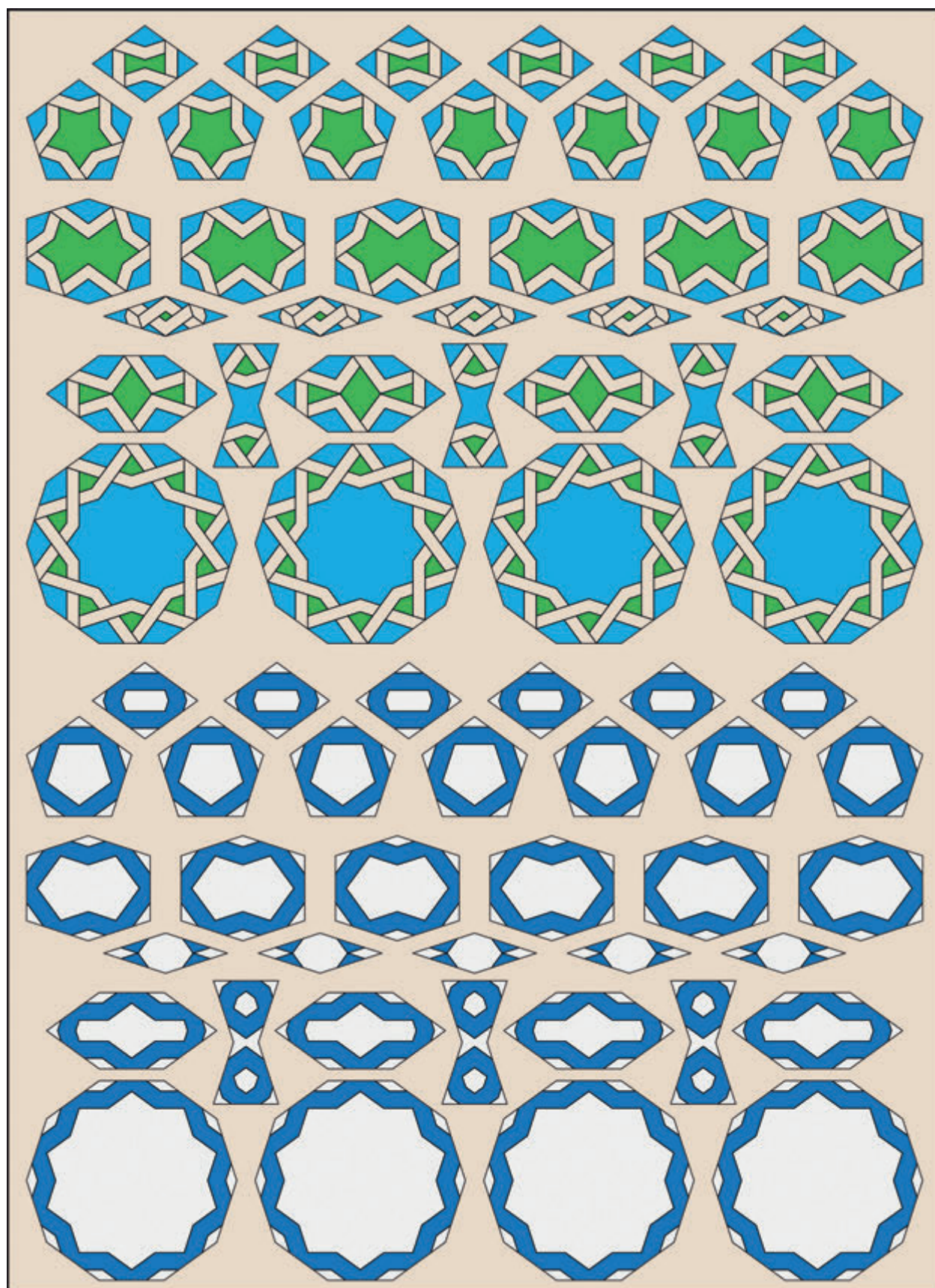
Активност 3Б - Друга активност у овом одељку укључује (1) фотокопирање два сета унапред нацртаних многоуглова; (2) њихово пажљиво исецање; (3) њихово састављање у другачијем дезену; (4) опредељивање за омиљени дезен; и (5) лепљење изабраног орнамента на другом комаду папира. Испробајте више теселација са сваким сетом пре него што се одлучите за најинтересантнији по вашем избору.

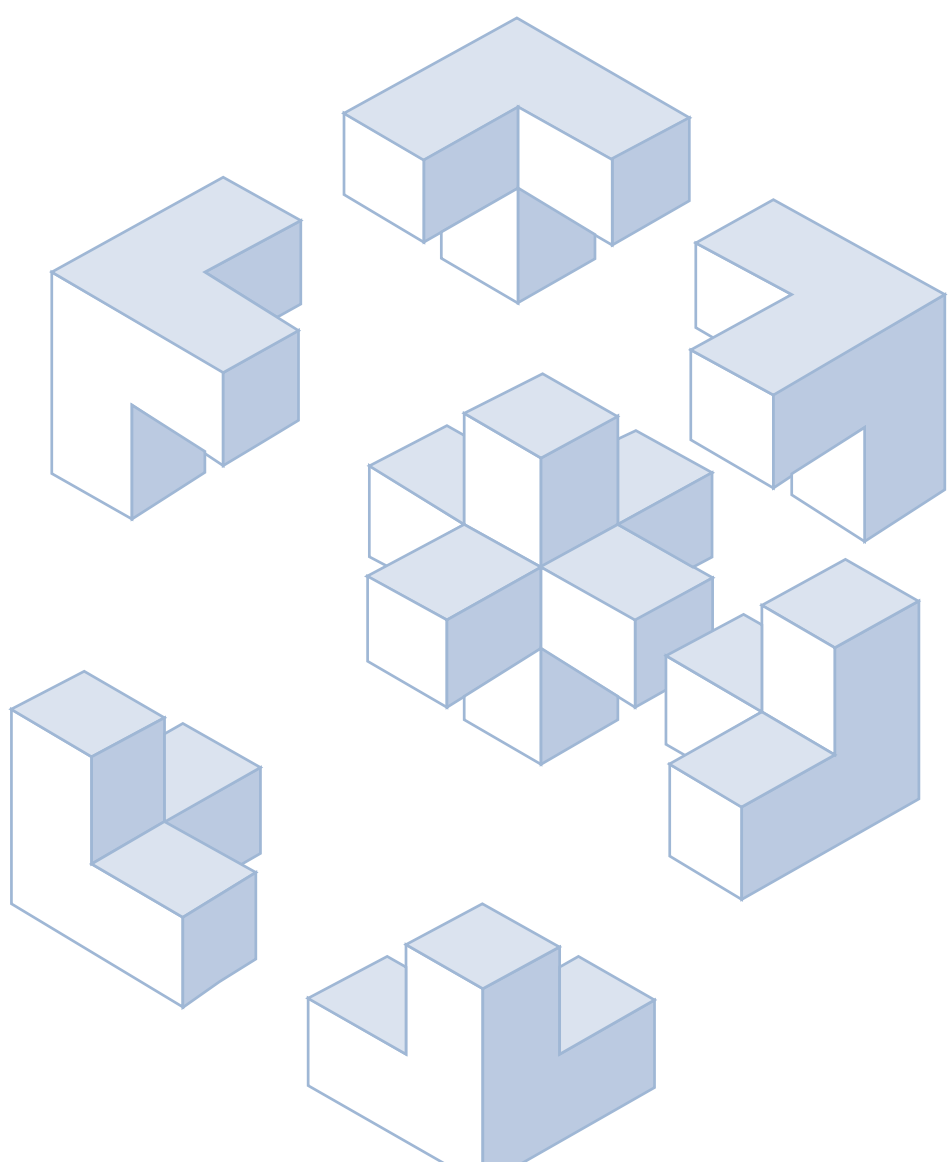


Следећа теселација је најчешћа у историји исламске орнаментике и следи из 5-оструког система. Функционише изузетно добро са сваком од четири фамилије дезена.



Горњи скуп многоуглова је орнамент из фамилије дезена средишњих углова. Дољи наведени орнамент потиче из шаблона тупих углова. Теселације које ће ови многоугаони елементи дати могу бити засновани на ромбском понављању (ромбској решетки), као и правоугаоним и неправилним шестоугаоним јединицама које се понављају. Такође је могуће конструисати теселације и орнаменте са радијалном симетријом.







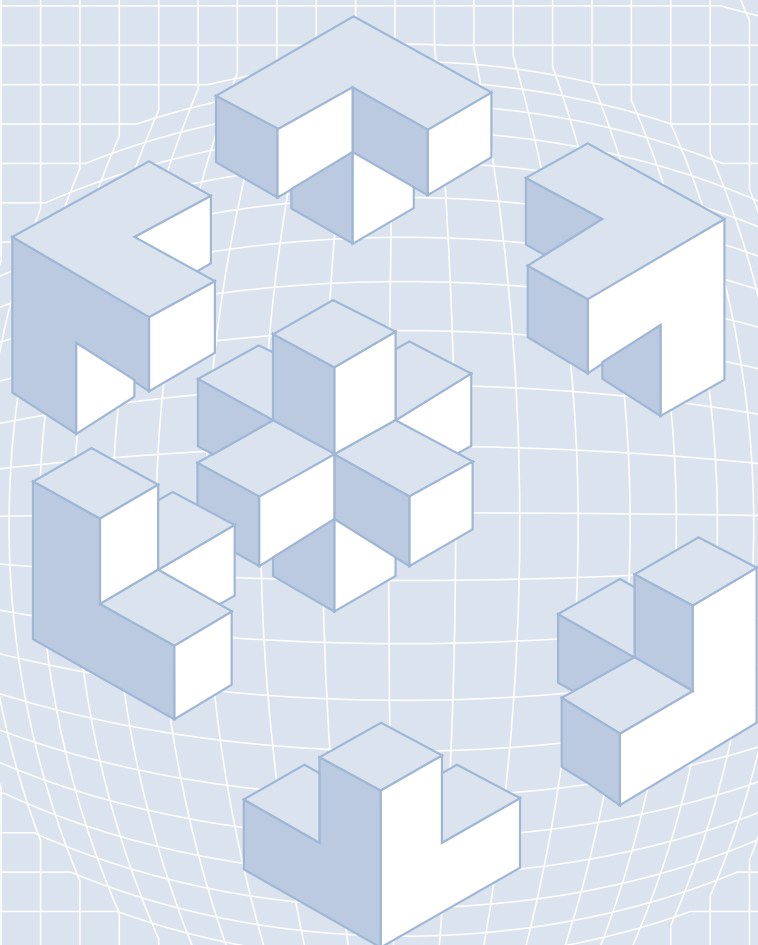
VISUALITY &
MATHEMATICS

EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

Жан-Марк Кастера

Арабеске и квазикрители

АРБЕСКЕ И КВАЗИКРИСТАЛИ





Жан-Марк Кастера: Ја сам уметник који ради у области геометријске уметности. Имајући искуство у математици, прво сам предавао на универзитету у Паризу, затим сам почео да радим на 3Д анимацији, а касније и на својим сопственим пројектима. Тренутно истражујем нове путеве у арабеској уметности, истраживања која су проширена примењивањем теорије квазикристалa. Неке практичне апликације, које су реализоване заједно са познатим архитектом Норманом Фостером, могу се видети у Емиратима.

Кратка библиографија:

„Арабеске“, у издању АЦР-а (ACR editions), Париз 1996, енглеско издање објављено 1999.

„Свежа геометрија“, са Хелен Жоли, Атеље Atelier 6½, Париз 1991. (“Géométrie douce”, with Helene Jolis, Atelier 6½, Paris 1991.)

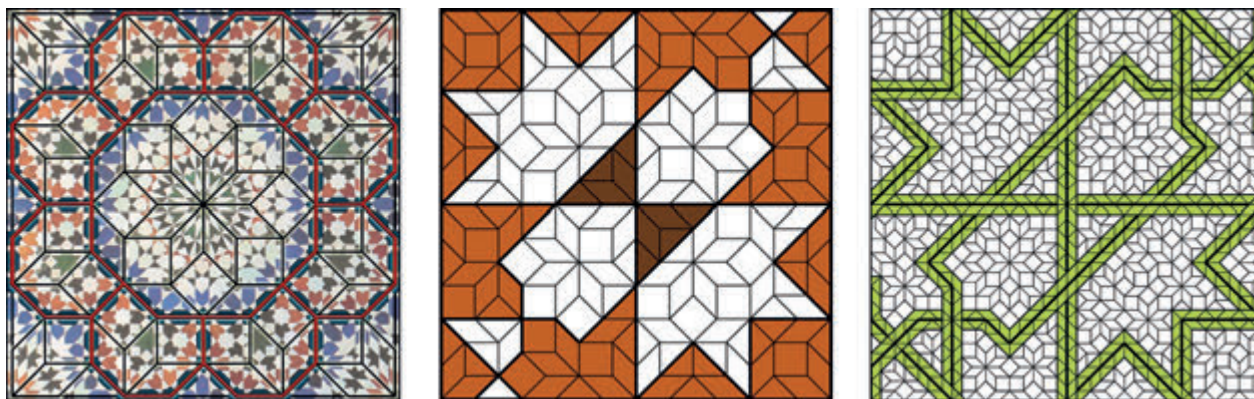
Моји последњи радови су доступни на мојој веб страници: castera.net

Предлажем две активности, користећи два комплета плочица, које се односе на уметност zellij (мозаици направљени од глазираних керамичких плочица) и теорију квазикристалa. За сваки сет плочица можете правити периодичне или неперидичне шаблоне и експериментисати са својством само-сличности. Први сет плочица припада традиционалном репертоару осмоугаоне породице zellij, која преовладава у западном делу исламског света, док други сет даје шаблоне са локалном петоструком симетријом, која је уочљивија у Персијском стилу. Сродни 2Д квазикристали су Аманови (Ammann) шаблони у првом сету, систем који је сличан али не и идентичан са Пенроузовим шаблонима у другом сету.

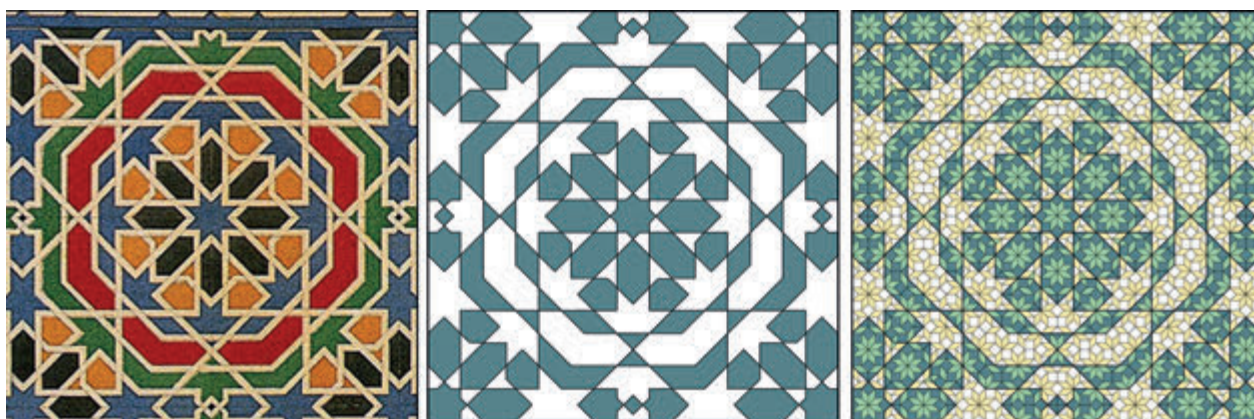
Неке примедбе о односу Арабеске и осмоугаоних квазикристалa

Можемо да говоримо о два нивоа у zellij мотиву: колективном нивоу, који подразумева структуру целог панела, и индивидуалном нивоу који подразумева појединачне плочице.

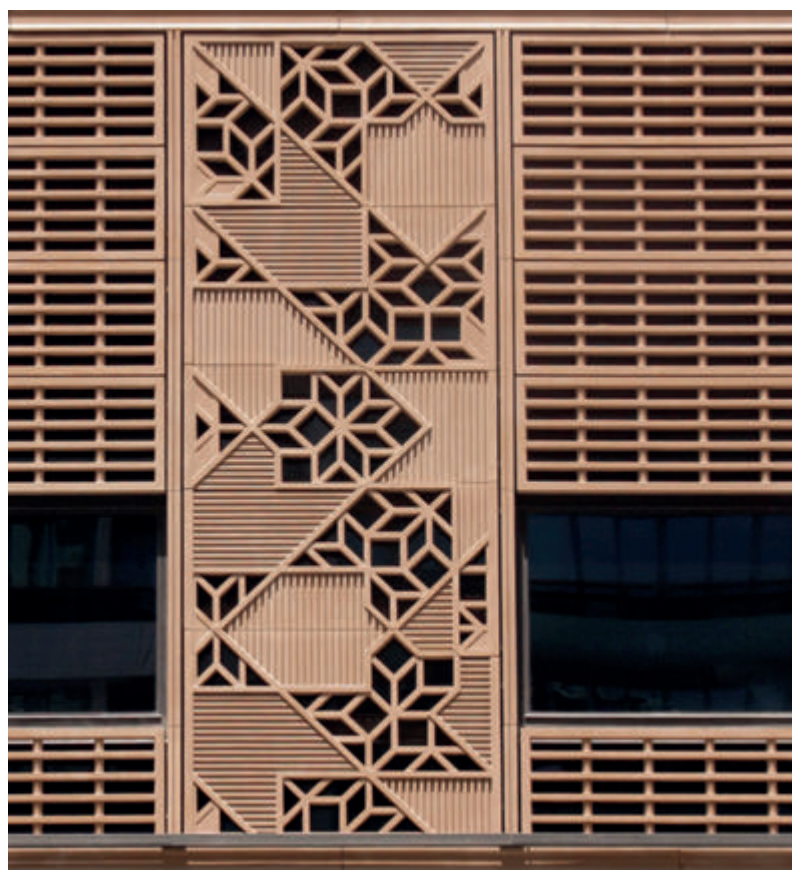
Прва веза са квазикристалима, која се појавила када сам радио на zellij шаблонима, тиче се колективног нивоа: структура коју ја зовем скелет (прва публикација у „Свежој геометрији“ (“Géometrie douce”), 1991). Друга веза се појавила када сам радио на пројекту у Абу Дабију са архитектама Фостер & Партнери. Она се односи на индивидуални ниво: свака плочица се може поделити на квадрате, ромбове и полу-квдрате (једнакокраке правоугле троугле), на такав начин да када их ставите заједно, у складу са правилима zellij, они чине мрежу сличну Амановим шаблонима.



Слика 1.1. Три нивоа веза између осмоугаоне породице zellij и Аманових шаблона: колективни ниво (десно), прости индивидуални ниво (у средини) или са преплетом (десно).



Слика 1.2. Пример из Египта (са очигледним утицајем западњачког стила). Лево: стварни образац. У средини: цртање једноставних линија на месту преплитања. Десно: растављање плочица, Аманов образац.



Слика 1.3. Прва практична примена у архитектури везе између Амановог обрасца и осмоугаоног zellij-a, на индивидуалном нивоу. Абу Даби, Централна пијаца.

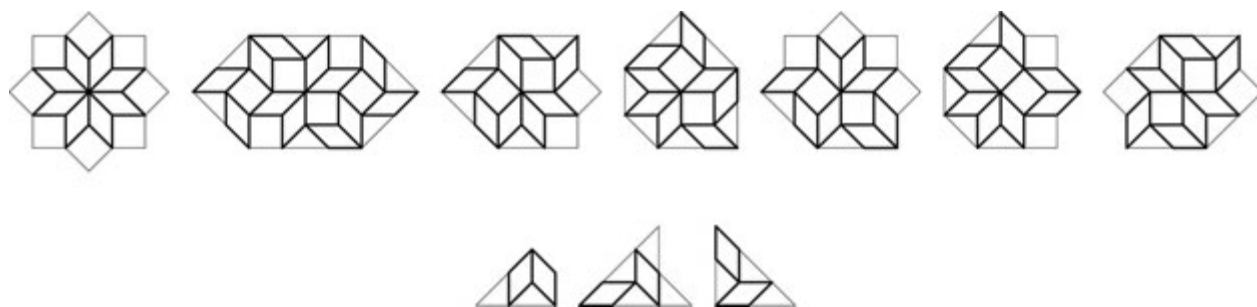
Активност 1 : Две варијације „ осмоугаоне слагалице Zellij“ (плоча 1.1 и плоча 1.2).

Оштампајте и исеците колико год можете примерака (4 је идеално) сета плочица, затим ставите плочице заједно како бисте направили шаблон према правилима zellij (плочице постављене једна уз другу, континуитет линија између плочица, смењивање боја).

Можете користити први модел (плоча 1.1) или други (плоча 1.2). Можете такође направити сет плочица супротних страна, користећи плочице са лицем из првог модела и наличјем из другог. Користите аеросол лепак.

Облици сваке плочице припадају традиционалном репертоару осмоугаоног zellij. Новина је да је свака плочица украшена квадратима, ромбовима и полу-квадратима. Када се плочице правилно поређају, ивицу уз ивицу, сваки полу-квадрат природно нађе свог парњака, те стога можете видети шаблон направљен од квадрата и ромбова који су комбиновани у zellij шаблону. Овај шаблон је сличан Амановом шаблону, а понекад се може сматрати делом осмоугаоног 2Д квазикристала.

Напомена: са овим плочицама можете направити и периодичне обрасце или непериодичне обрасце.



Слика 1.4. Различите плочице, са украсима од квадрата, ромбова и полу-квадрата. Ово су облици које добијате из плоче 1.1.

Вежба 1.1.

Можете да користите својство само-сличности са овим сетом плочица. Доња слика показује начин на који сваки плочица може бити направљена од плочица које припадају истом сету у мањој размери (иако су дуж ивица црвене плочице скраћене).



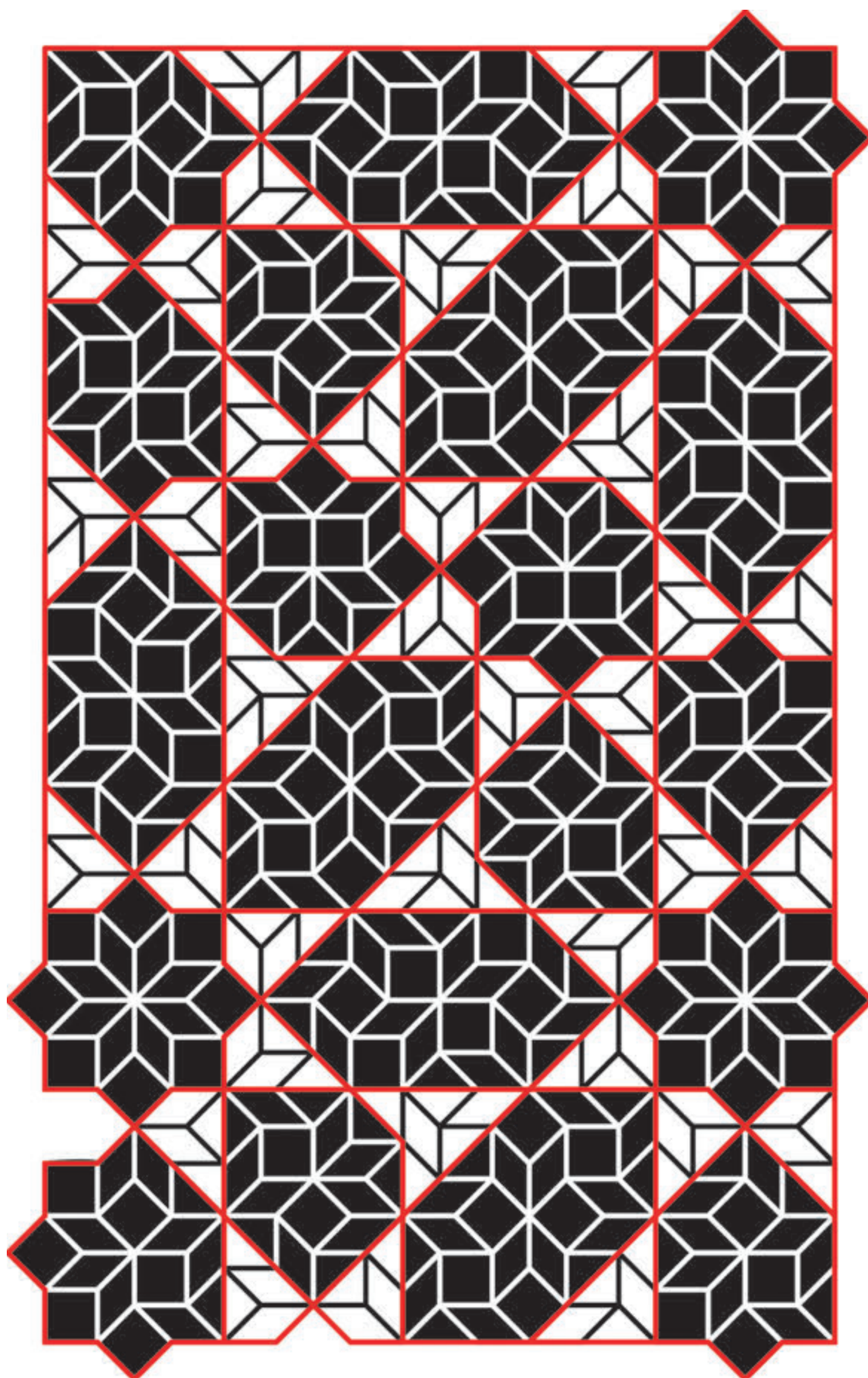
Слика 1.5. Самосличност „zellij“ плочица.

1. Који је однос између ове две мере?
2. Примена: на супротан начин, свака плочица, на пример, „Saft“, се може конструисати у већој размери (видети Слика 3.2).

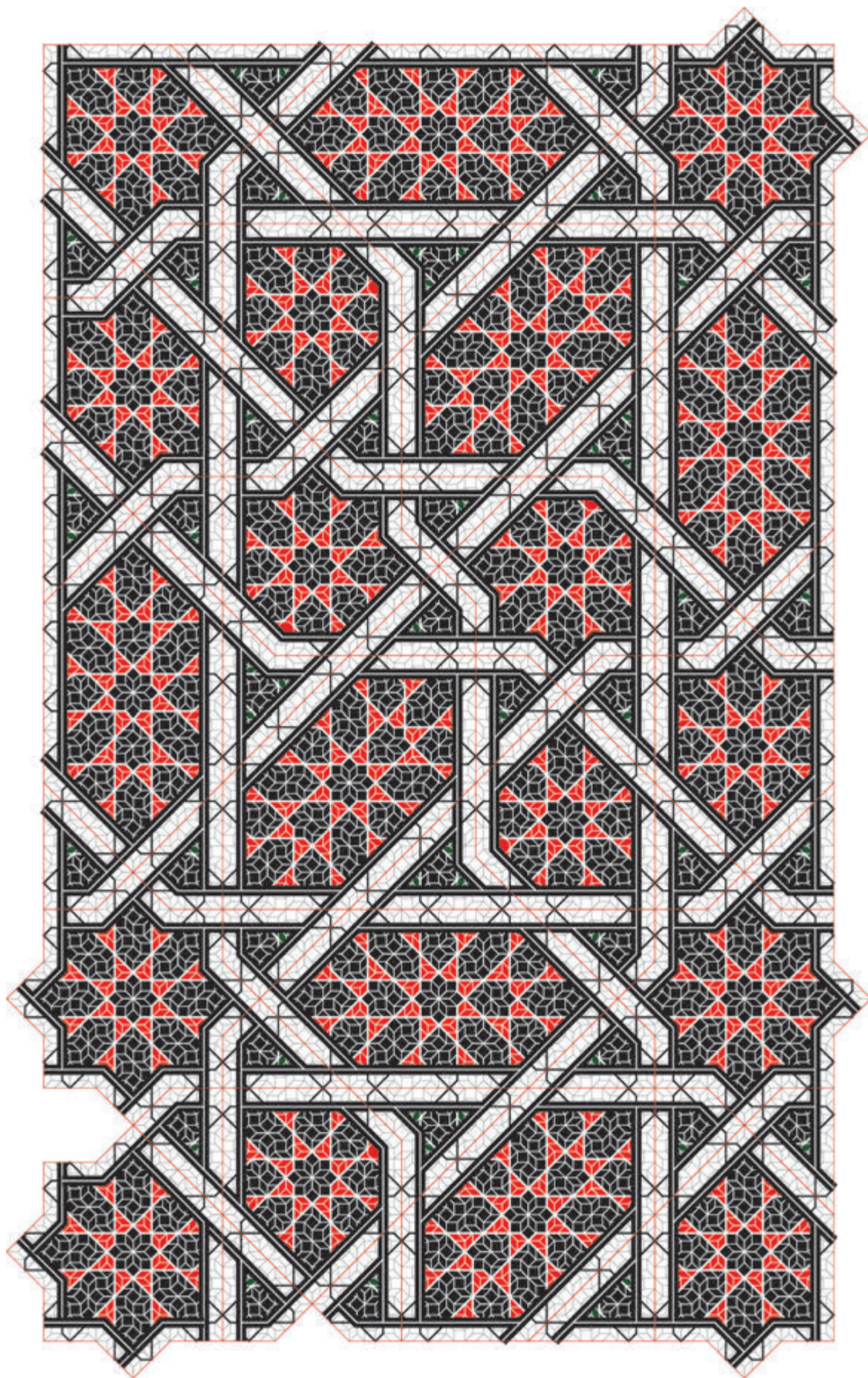
Користећи следеће странице:

Исеците плочице дуж средњих линија црвене боје. На другој страни је нацртан секундарни ниво zellij плочица и секундарни ниво осмоугаоног обрасца.

При уклапању плочица обратите пажњу на то како се боје смењују.



Плоча 1.1. Осмоугаона породица zellij образаца и Аманових образаца. Исеците плочице дуж црвене линије.



Плоча 1.2. Осмоугаона породица zellij образаца, само-сличност. Исеците плочице дуж црвене линије (исто као на претходној страни).

Активност 2 : „Х-Слагалица“.

Ова „Х-слагалица“ је направљен од сета који се састоји од само два типа различитих плочица („Х-плочице“) украшених на једноставн начин, коришћењем само две линије да се направи Х („Х-линија“).

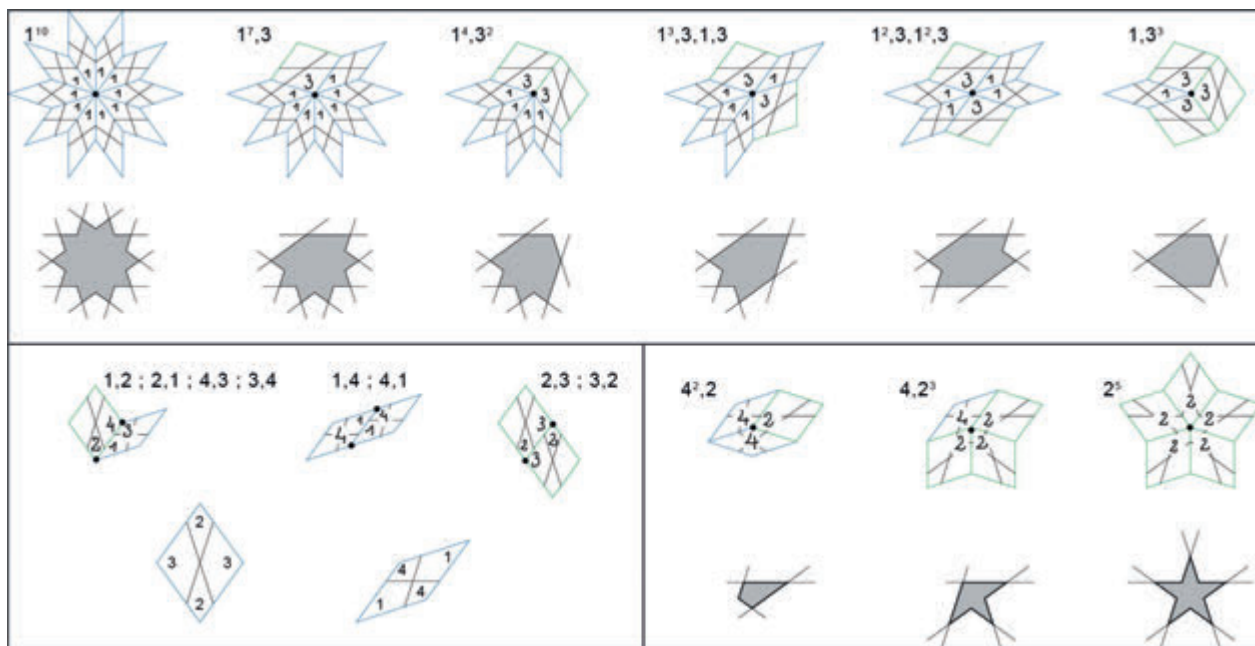
Дужина сваке стране је једнака, а углови су такви да 10 малих плочица могу да направе 10-краку звезду, а 5 широких могу направити 5-краку звезду.

Ове плочице су исте као оне у Пенроузовим обрасцима, али правила нису иста: иако Пенроузова правила уклапања избегавају периодичан шаблон, шаблони направљени од Х-слагалице могу бити периодични или неперидични.

Идеја о Х-плочицама је настала када сам тражио неку врсту морфогенезе петоугаоне породице традиционалних дезена (нарочито у персијском стилу) (http://castera.net/entrelacs/public/articles/Flying_Patterns.pdf). Ови прости облици били су први корак у мом систему, али се на крају испоставило да су, упркос њиховом једноставном шаблону, они били моћни у својој једноставности: могу да се користе за једну софистицирану породицу дезена у том стилу (али не тврдим да су овај метод користиле занатлије у том историјском периоду).

Невероватна ствар је однос између комплексности и једноставности.

Правила уклапања: Она су очигледна: облици се морају поставити један уз други поштујући континуитет Х-линија.

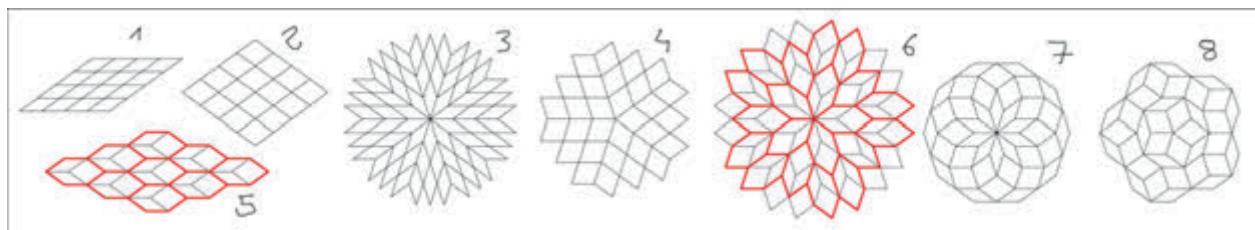


Слика 2.1. На врху и доле десно: исправан распоред плочица око темена и одговарајући „zellij“ облици исцртани Х-линијом.

Доле лево: неисправан распоред. Бројеви указују на углове око темена: број 1 означава угао од 36° , 2 угао од 72° , итд.

Можете видети да се коначан број облика налик на „zellij“ могу извући Х линијама

Различите врсте композиција.



Слика 2.2. Композиције са два различита ромба. (1,2): периодичне, (5): шестоугаона => периодична; (3,4,6): радијалне; (7,8): петоугане симетрије => неперидична;

Ово функционише са једноставним ромбовима, али са украсима Х-линије, композиције (1, 2, 3, 4, 8) су неисправне. Са друге стране, можемо се слободно играти плочицама.

Напомена : „Непропустљиве рупе“.

Понекад можете да се "заглавите" када део равни ограничен неким плочицама не може бити испуњен. Природна реакција је да се промени шаблон на начин да се избегне та ситуација. Али не бојте се празнине: можете увек пронаћи начин да кружите око ње, тако да се шаблон може наставити. На крају, оно што добијате је шаблон са једном или више рупа. Рупа је непропустљива када је немогуће ставити ниједну X-плочицу у њу уважавајући континуитет X-линије (узимајући у обзир X-плочице).



Слика 2.3. Различите врсте непропустљивих рупа.

Напомена: X-плочице су украшене коришћењем дебљих белих линија, које прелазе једна преко друге. Забавна ствар је начин на који ти преплети природно функционишу у шаблону у односу на смењивање: горе, доле, горе ...

Вежба: Која је веза између углова у свакој плочици и оних између X-линија?

Вежба: Рупе.

Колико врста различитих облика „непропустљивих рупа“ може да постоји (одговор није очигледан!)?

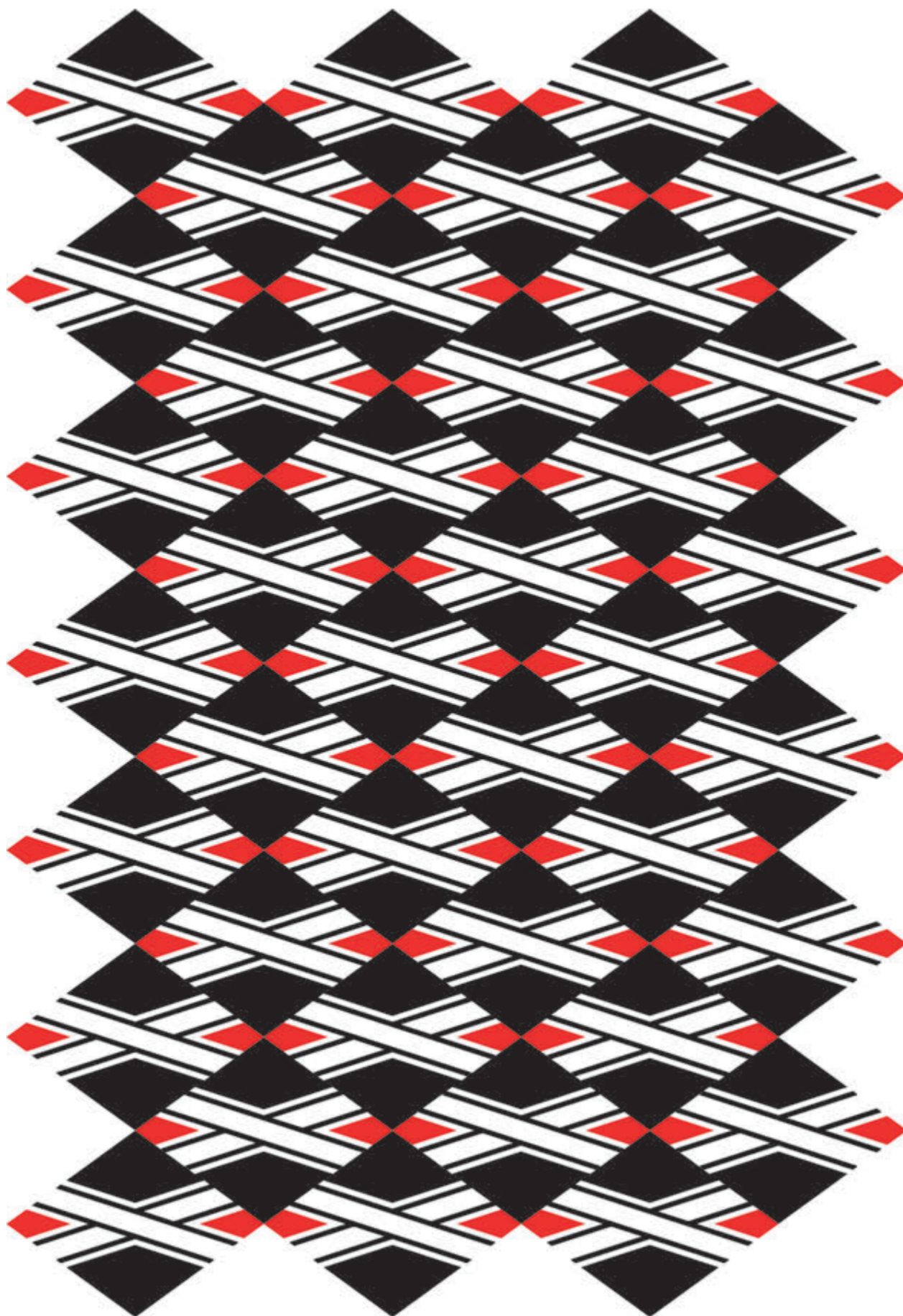
Вежба: Самосличност.

Да ли можете да дефинишете својство само-сличности за сваку од две плочице, тј. начин да компонујете исте облике ромба (у већој размери скала) са X-плочицама.

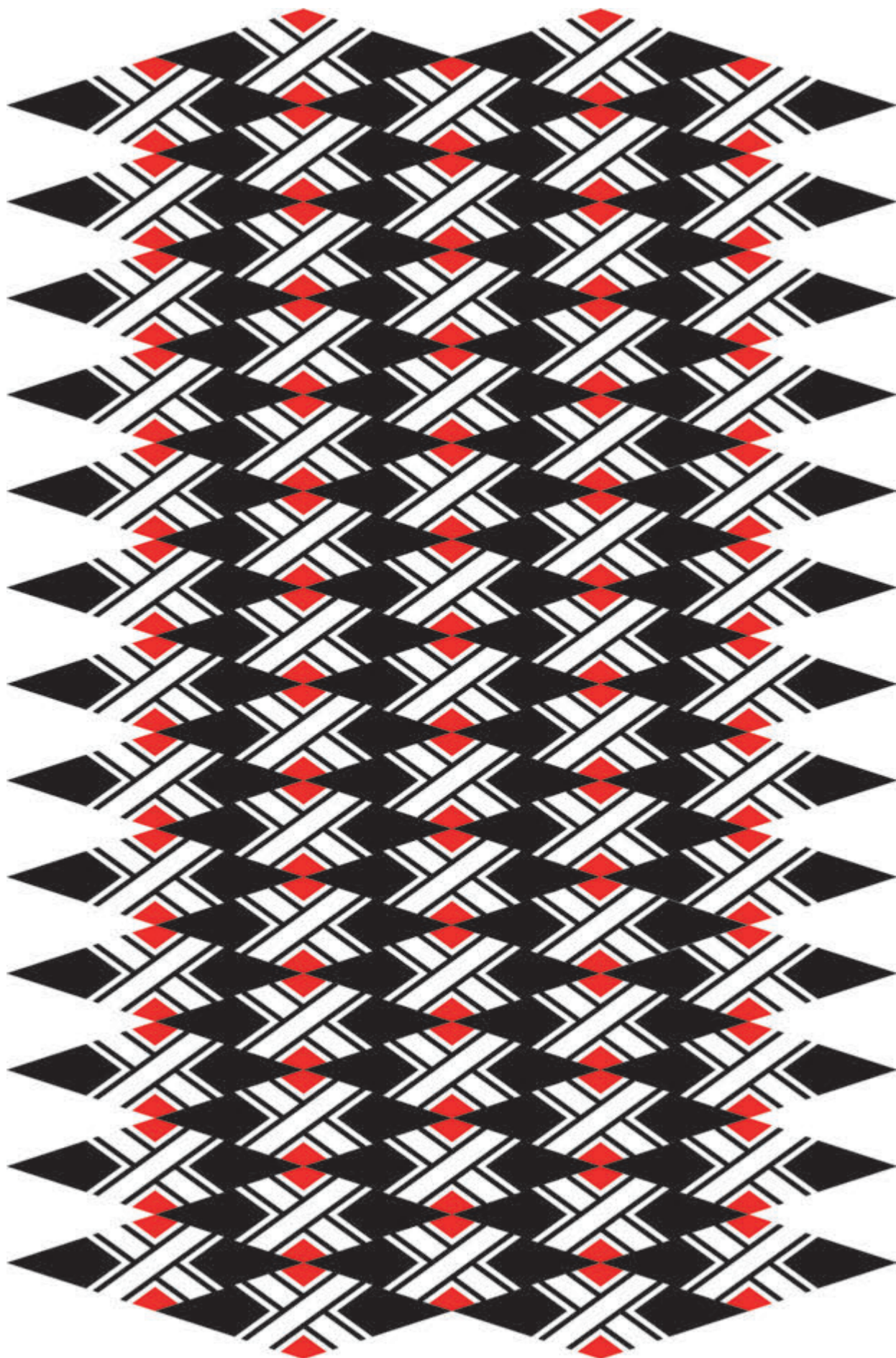
У том случају, који је однос самосличности?

Вежба: Можете ли да замислите сличну слагалицу од осмоугаоног квадрат/ромб система?

Следеће стране (плоче 2.1 и 2.2): Исеците плочице користећи обе стране и играјте се.



Плоча 2.1. Исеците ромбове (свака плочица је иста као она издвојена на дну).

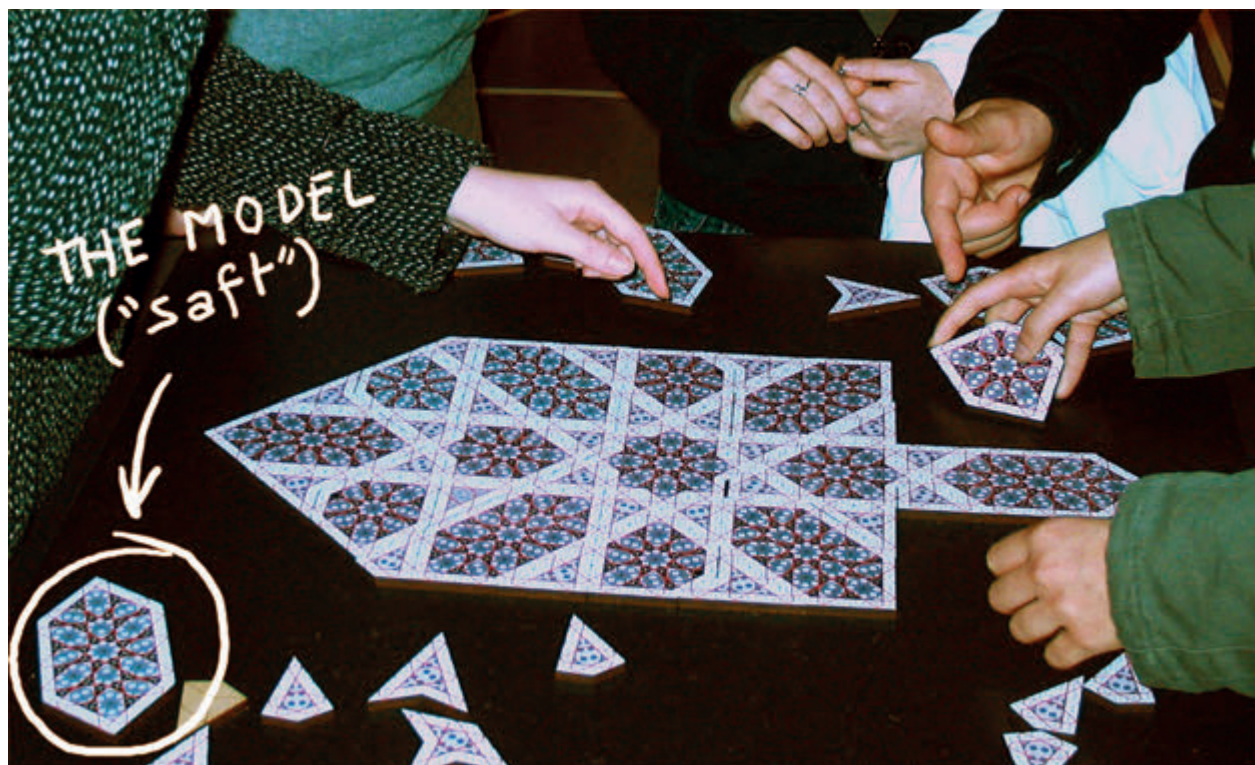


Плоча 2.2. Исеците ромбове (свака плочица је иста као она издвојена на дну).

Примери шаблона



Слика 3.1. Деца која се играју са две верзије „Х-слагалице“ на фестивалу математике у Паризу.



Слика 3.2. Начин да се користе осмоугаоне плочице: Људи који праве велики „Saft“ „дефлацијом“ у Музеју науке (Palais de la découverte) у Паризу.



Слика 3.3. Пример коришћења традиционалне уметности: врата на Серефели џамији (иџ Serefeli mosque), Једрене, Турска. Лево: Оригинална врата; У средини: растављање на ромбове. Десно: реконструкција са X-плочицама.



Слика 3.4. Још једна врата на истој Серефели џамији, Једрене, Турска (иџ Serefeli mosque). Лево: Оригинална врата; У средини: растављање на ромбове. Десно: реконструкција са X-плочицама.



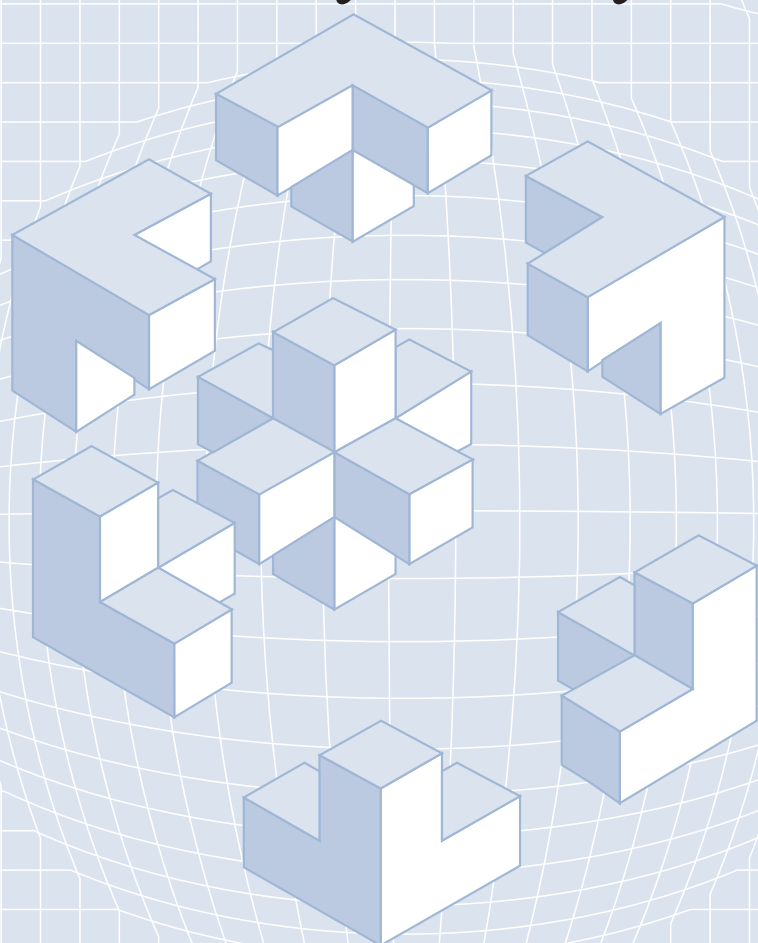
VISUALITY &
MATHEMATICS

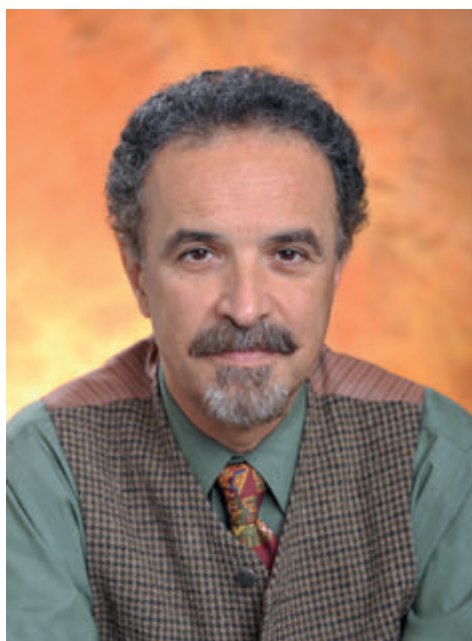
EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

АРБЕСКЕ И КВАЗИКРИСТАЛИ

Реза Сарханги:

Украшавање правилних
полиедара коришћењем
историјских персијских
чврсто повезаних
полигоналних образаца
у облику звезде





Реза Сарханги је професор математике на Таусон универзитету, Мериленд, САД. Он предаје на дипломским студијама проучавање образаца и математичких дизајна и надгледа студентске истраживачке пројекте у овој области. Оснивач је и председник организације „Мостови“ (Bridges Organization), која организује серију годишњих међународних конференција „Мостови“: Математичке везе у уметности, музици и науци“ (www.BridgesMathArt.Org). Сарханги је био математички педагог, графички уметнички дизајнер, наставник драме, драмски писац, позоришни редитељ и сценограф у Ирану пре преласка у САД 1986.

Везани чланци:

Reza Sarhangi (2014), Decorating Regular Polyhedra Using Historical Interlocking Star Polygonal Patterns – A Mathematics and Art Case Study, Refereed Conference Proceedings, Bridges 2014 - Mathematical Connections in Art, Music, and Science, Seoul, Korea.) Интернет приступ: <http://archive.bridgesmathart.org/2014/bridges2014-243.pdf>

Reza Sarhangi (2012), Interlocking Star Polygons in Persian Architecture: The Special Case of the Decagram in Mosaic Designs, Nexus Network Journal, Architecture and Mathematics, Volume 14, Number 2, Birkhäuser Verlag, Springer, Heidelberg, Germany, pp. 345-372.

Reza Sarhangi (2010), Making Modules for Mosaic Designs, The Journal of the Symmetrion (Symmetry: Culture and Science), Michel Petitjean, Editor-in-Chief of Symmetry, MTI, INSERM UMR-S 973, University of Paris, France, Vol. 21, No. 4, pp. 381-392.

1. Увод

Правилни полиедри су високо организоване структуре које поседује највећу могућу симетрију међу свим полиедрима, што их чини естетски допадљивим. Ова геометријска тела вековима повезују бројне дисциплине, укључујући астрономију, филозофију и уметност. Пет који су конвексни су Платонова тела, а четири који нису конвексни су Кеплер-Поансоова тела. Они поседују својства да код сваког правилног полиедра (а) све пљосни су подударни правилни многоугаоници (конвексни или не-конвексни), и (б) распореди многоуглова око свих темена су исти.

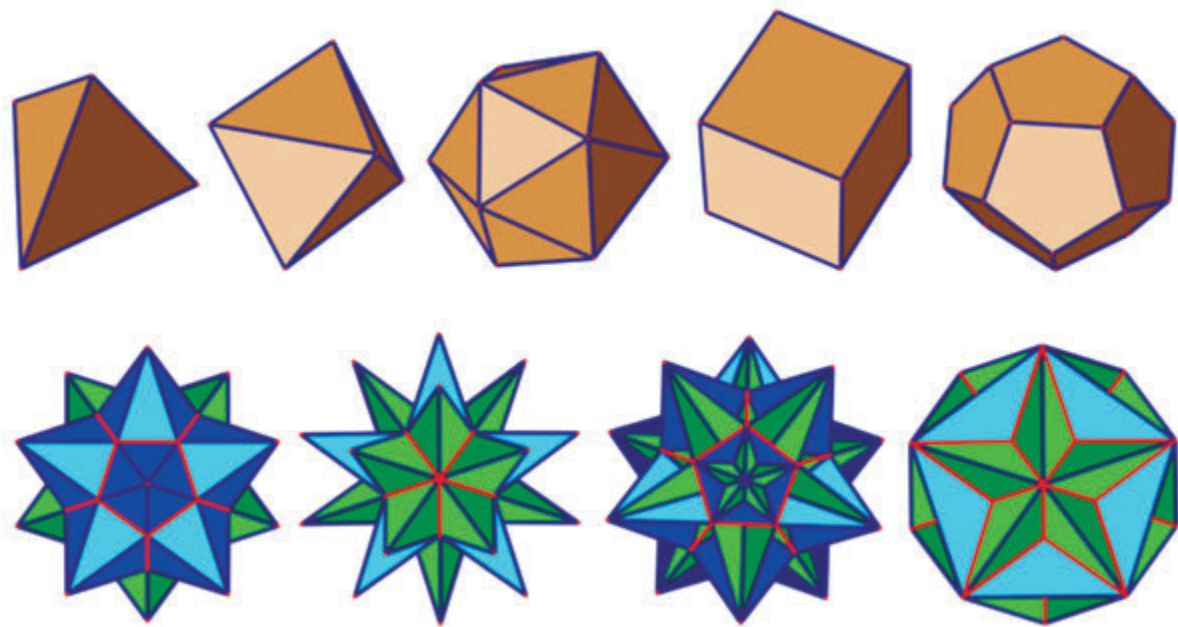
Платонова тела су била позната много раније од Платоновог доба. На уклесаном камењу (које датира око 2000 пре нове ере) које је откривено у Шкотској, на неким од њих су урезане линије које одговарају ивицама правилних полиедара. Древни Египћани су користили икосаедар као коцку за игру. Постоје многи мали бронзани додекаедри који потичу из времена Римљана од другог до четвртог века, а који су украшени елипсоидима на сваком темену и који имају кружне рупе на свакој површини. Постоје докази да су Питагорејци знали за правилна геометријска тела као што су коцка, тетраедар и додекаедар. Касније, грчки математичар, Тететус (Theatetus) (415 - 369 пре нове ере) је развио општу теорију правилних полиедара и додао октаедар и икосаедар списку правилних полиедара који су били познати од раније. Назив "Платонова тела" за правилне полиедре потиче од грчког филозофа Платона (427–347 пре нове ере), који их је повезао са "елементима" и Универзумом у својој књизи "Тимеус" (Timaeus). У грчкој филозофији "елементи" су била су четири ентитета који су градили физички свет; ови елементи су ватра, ваздух, земља и вода.

Постоји још четири правилна полиедра који нису конвексни. Јоханес Кеплер (1571–1630) је открио два од њих, мали звездасти додекаедар и велики звездасти додекаедар. Касније, Л. Поансо (1777–1859) је комплетирао Кеплеров рад проналажењем друга два неконвексна правилна полиедра: великог икосаедра и великог додекаедра. Свеобухватна обрада и референце на обимну литературу о геометријским телима могу се наћи на Интернет извору Virtual Polyhedra – The Encyclopedia of Polyhedra [3].

У Шлефлијевим (Schläfli) симболима (n, m) датим у следећој табели број n је је број страница правилних многоуглова, при чему се по m оваквих многоуглова сустиче у сваком темену посматраног правилног полиедра. У другој табели симбол $5/2$ означава звездасти петоугао (пентаграм), који је правиан не-конвексни петоугао. Слика 1 приказује правилна геометријска тела.

Полиедар	Шлефлијев симбол	Пљосни полиедра	Видљива пљосан полиедра
Тетраедар	$(3, 3)$	Једнакостранични троугао	Једнакостранични троугао
Октаедар	$(3, 4)$	Једнакостранични троугао	Једнакостранични троугао
Икосаедар	$(3, 5)$	Једнакостранични троугао	Једнакостранични троугао
Хексаедар (Коцка)	$(4, 3)$	Квадрат	Квадрат
Додекаедар	$(5, 3)$	Правилан петоугао	Правилни петоугао
Мали звездасти додекаедар	$(5/2, 5)$	Правилан петоугао	"Златни" троугао
Велики звездасти додекаедар	$(5/2, 3)$	Правилан петоугао	"Златни" троугао
Велики икосаедар	$(3, 5/2)$	Једнакостранични троугао	Два троугла на слици 12
Велики додекаедар	$(5, 5/2)$	Правилан петоугао	Тупоугли "златни" троугао

Табела 1: Правилни полиедри

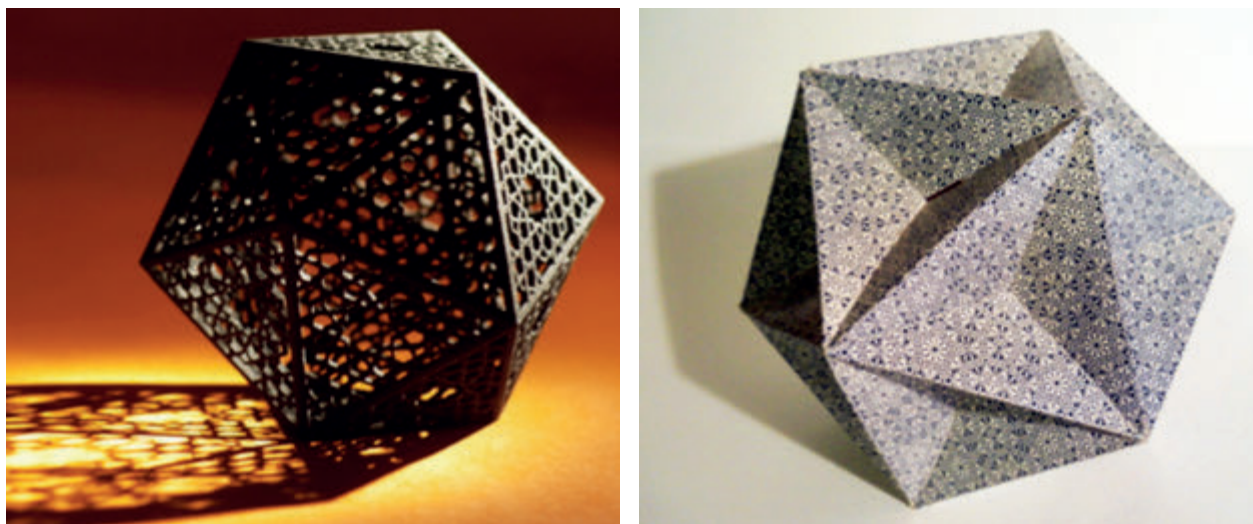


Слика 1: Горе: тетраедар, октаедар, икосаедар, хексаедар (коцка) и додекаедар. Доле; мали звездасти додекаедар, велики звездасти додекаедар, велики икосаедар и велики додекаедар

Циљ овог чланка је да прикаже методе за украшавање правилних полиедара коришћењем персијских гирих шара и да да упутства за израду ових полиедара од папира. Гирих (чвор на персијском) се односи на један (најчешће) правоугаони регион који се састоји од једног основног региона са осном или ротационом симетријом, за дезен који укључује чворишта геометријског мрежног (grid) система у облику паукове мреже и конструкцијске линије за генерисање тог дезена.

2. Неки примери декорисања геометријских тела

Постоје бројни занимљиви примери декорисања геометријских тела. Леви приказ на Слици 2 приказује Мрежасти икосаедар који је створио уметник Фил Вебстерфром (Phil Webster) Питсфилд, Масачусетс. Ово уметничко дело је представљено на Уметничкој изложби конференције „Мостови“, у Еншедеу, Холандија, одржаној 2013. године [2]. Десни приказ на Слици 2, украшен велики додекаедар који је креирао Ричард Калваит (Richard Kallweit), уметник из Бетаније, Конектикат, представљен је на Уметничкој изложби Заједнички математички сусрет, у Балтимору, Мериленд, САД, одржаној 2014. године [2].



Слика 2: Мрежаста икосаедар и украшен Велики додекаедар

Освојени светови (Captured Worlds) уметника Дика Термеса (Dick Termes) (<http://termespheres.com>) је скуп Платонових тела која су украшена маштовитим сценама виђеним из шест центара перспективе, што омогућава да цело тродимензионално окружење може да се пројектује на полиедре (лево на Слици 3). Б. Г. Томас и М. А. Хан из Школе за дизајн, Универзитет у Лидсу, Уједињено Краљевство, користили су двојне пројекције на површини Платонових тела, посебно додекаедра, за украшавање површина полиедара (десно на Слици 3) [10].



Слика 3: Освојени светови уметника Дика Термеса и пример пројекције дезена коцке на додекаедар Б. Г. Томаса и М. А. Хана

Током радионице на конференцији „Мостови“ у Печују, Мађарска, 2010., Е. Б. Минанов из Школе за образовање и Б. Г. Томас из Школе за дизајн, Универзитета у Лидсу у Великој Британији, водили су своје учеснике радионице кроз поступак стварања Ешеровских теселација. Затим су користили приказане идеје да организују радионицу са предавањем о 3Д конструкцијама Платонових тела која су била декорисане Ешеровим шарама [6].

3. Историјски дезени за декорисање геометријских тела

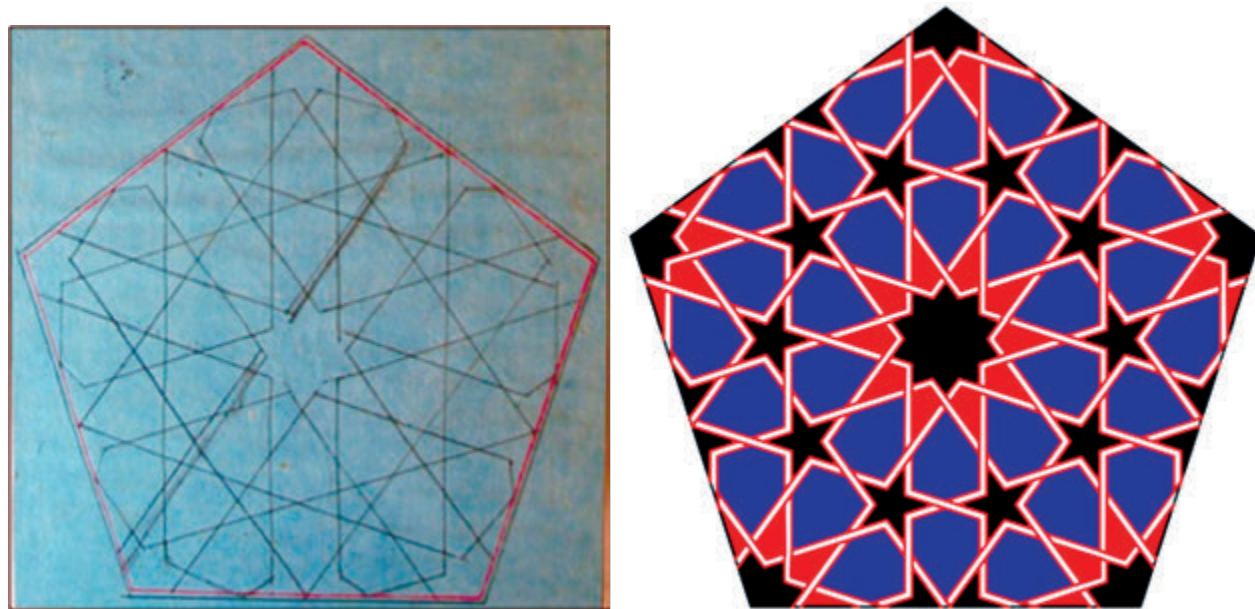
Важно је напоменути да, пошто дезен на једној страни украшеног геометријског тела треба да буде идентичан на свим осталим странама тела, све линије дезена треба да буду у потпуној координацији и хармонији једне са другима на такав начин да могу да се наставе са једне стране тела на другу без завршетка или прекида.

Постоји само један мали број свитака (tumār) и брошура (daftar) из прошлости у којима су забележени, са једне стране, шаблони и дизајни за декорацију грађевина, или, са друге стране, геометријски експерименти за креирање чврсто повезаних полигоналних дезена у облику звезде. Међутим, такви дизајни су стигли до нас без инструкција о корацима за неопходним за њихову геометријску конструкцију коришћењем традиционалних алата, шестара и лењира, или било којих других алата.

3.1. Декорисање Платонових тела. За декорацију правилних полиедара коришћењем историјских и традиционалних чврсто повезаних полигоналних дезена у облику звезде, потребно је трагати за документима о украшавању многоуглова: једнакостраничног троугла, квадрата и правилног петоугла. Почевши са додекаедром и његовом пљосни, правилним петоуглом, аутор је истражио већину доступних старих докумената везаних за за украшени петоугао са следећим спецификацијама:

- (a) Центар петоугла се поклапа са центром k/l звездастог многоугла који покрива централни део петоугла.
- (b) Темена се поклапају са центрима истих или других k/l звездастих многоуглова који покривају углове петоугла.
- (c) Неки сегменти повезују звездасте многоугле на складан начин који омогућава формирање једног дизајна.

Математички гледано, ако су k/l звездасти многоугли који се користе за украшавање петоугла идентични, онда, пошто је сваки унутрашњи угао правилног петоугла $\frac{(5-2)\pi}{5} = 108^\circ$, и пошто се у сваком темену додекаедра сустичу по три петоугла, на успешном дизајну, један тип звездастог полигона ће се појавити у сваком темену које покрива 324° . То значи да k/l звездасти полигон у центру, који је n -лисна ружа која покрива 360° , треба да се изгради на такав начин да број степени угла у сваком листу дели оба броја 360 и 324, као што то чини њихова разлика, 36. Стога k треба да буде природан број облика $5i$, $i \in \mathbb{N}$. Дакле, звезде полигони као што су $5/1$, $10/1$, $15/1$ и тако даље, обезбедиће одговарајуће централне дизајне за петоуглове (који ће градити конкавне звездасте полигоне $3/1$, $6/1$, $9/1$... на угловима додекаедра).



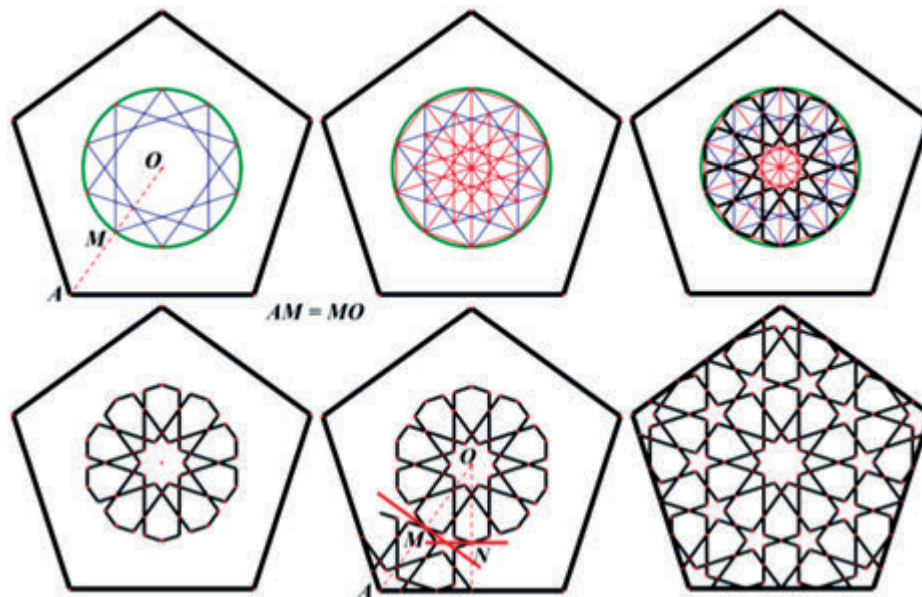
Слика 4: Украшени петоугао из колекције Мирзе Акбара (Mirza Akbar Collection), и украшен петоугао који је створио аутор на основу математике у Мирза Акбаровом украшеном петоуглу

Постоји много извора, укључујући и грађевине из прошлости, у којима можемо трагати за персијским традиционалним дезенима и где можемо наћи много примера. Један извор интересовања за проналажење таквог дезена била је Мирза Акбар колекција, која се налази у Викторија и Алберт музеју (Victoria & Albert Museum) у Лондону. Ова колекција се састоји од два архитектонска свитка заједно са више од педесет дизајна који су нацртани на картону. Колекцију је првобитно купио за Саут Кенсингтон музеј (South Kensington Museum) (претходник Викторија и Алберт музеја) Сер Каспар Пурдон Кларк (Sir Caspar Purdon Clarke), директор Музеја уметности (одељење Викторија и Алберт музеја) 1896. – 1905. у Техерану, Иран, 1876. Пурдон Кларк их је купио након смрти Мирзе Акбар Кана (Mirza Akbar Khan), који је био персијски државни архитекта овог периода [7].

Леви приказ на Слици 4 је из колекције Мирзе Акбара. Као што се види, конструисане линије на овом приказу нису прецизне, а дизајн изгледа као скица. Ипак, дизајн и $10/3$ звездасти многоугао у центру задовољавају наведена ограничења. Приказ десно на Слици 4, који је дизајнирао аутор овог текста користећи Geometer's Sketchpad програм, илуструје исти дезен, али обухвата испреплетане траке, што трансформише групу симетрија дезена, диједарску групе реда 10, тј. групу D_5 , у цикличну групу реда 5, тј. групу C_5 .

Очигледно, за геометријску конструкцију дезена, нису постојале инструкције у колекцији Мирзе Акбара, тако да је било неопходно да се она математички анализира како би се открили кораци конструкције.

Треба приметити да је полупречник круга описаног око петоугла на Слици 5, OA , што представља удаљеност од центра петоугла до једног његовог темена, двоструко већи од полупречника круга који је основа за 10/3 звездасти полигон у центру ($AM = MO$ у горњем левом приказу на Слици 5). Разлог за то је да су два 10/3 звездаста полигона, један у центру O , а други у темену A , одно симетрична један у односу на други, при чему се оса рефлексије налази испод тангенте круга у тачки M (видети доњи приказ у средини на Слици 5 који такође приказује тангенту круга у тачки N коју је неопходно користити као осу рефлексије да би се цртеж свездастог многоугла завршио). Пратећи горње приказе са лева на десно, у десном доњем углу можете видети правилно завршен дизајн.



Слика 5: Кораци за геометријску конструкцију украшеног петоугла Мирзе Акбара

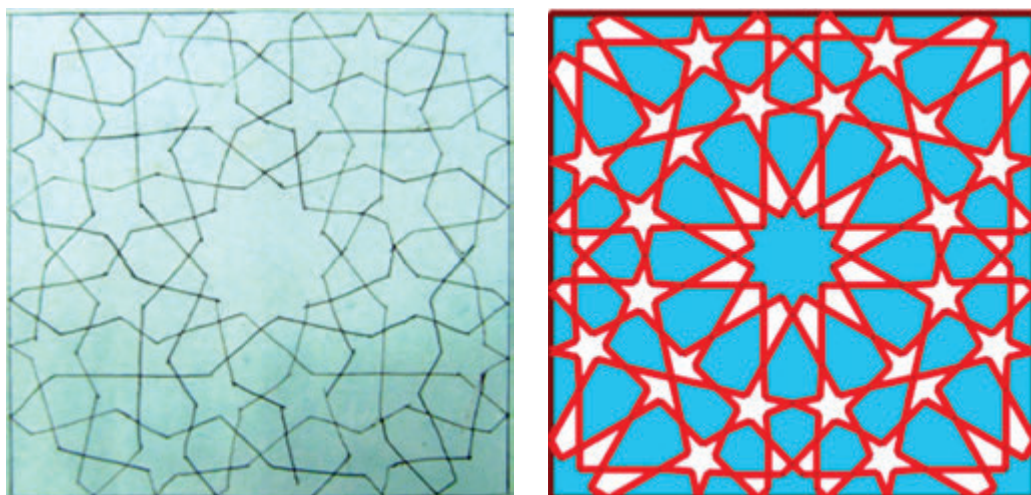
Фотографије на Слици 6 су са радионице коју је организовао аутор, а која је приказана у Истанбулском дизајн центру. Радионица је била део конференције о геометријским шарама у исламској уметности која је била одржана током 23.–29. септембра 2013. у Истанбулу, Турска. Радионица је обухватила изградњу додекаедра коришћењем украшеног петоугла Мирзе Акбара.



Слика 6: Фотографије са радионице у Истанбулском дизајн центру у Турској

Следећи изабрани многоугао за украшавање је квадрат. Није било тешко пронаћи украшени квадрат у колекцији Мирзе Акбара. Међутим, његов дизајн, као што се може приметити на левом приказу на Слици 7, био је веома груб нацрт без прецизности на било ком делу дизајна, показујући само тип многоугла који чине структуру, али без ичега што би могло да помогне дизајнеру да утврди кораке геометријске конструкције. Претраживањем књиге Ј. Бургоина [1], видимо да Слика 118 у овој књизи приказује исту структуру, али се пропорције незнатно разликују од скица из колекције Мирзе Акбара. Ова књига се састоји од 190 геометријских грађевинских плоча које су приказане у француском издању, *Les Eléments de l'art: le trait des entrelacs*, Firmin-Didot et al., Париз, 1879. Књига не пружа поступна упутства за геометријске конструкције. Ипак, постоје основни кругови и сегменти са танким испрекиданим линијама које омогућавају формирање таквих инструкција.

Да би се формирала упутства за дезен који је илустрован на Слици 8, коришћена је Слика 118, али неколико корака је промењено да би били у складу са традиционалним приступима за завршавање украшеног квадрата на Слици 7 (десни приказ).

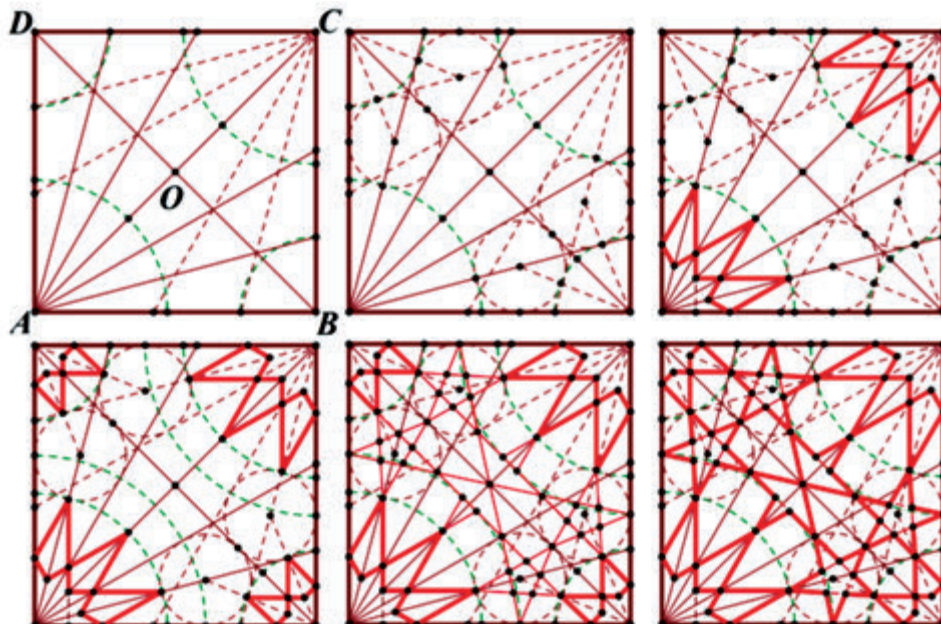


Слика 7: Украшени квадрат из колекције Мирзе Акбара и украшени петоугао који је створио аутор на основу врсте плочица које сачињавају квадрат Мирзе Акбара

Приступ изградњи, метод радијалне мреже, прати кораке које је дизајнер мозаика, Махероанакш (Махероанпаш) предложио за један други шаблон у својој књизи [5].

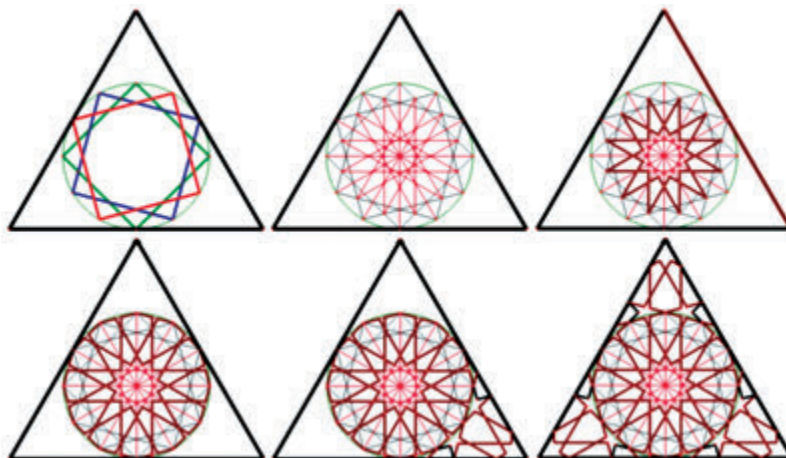
Поделите прав угао A на шест подударних углова конструкцијом пет кракова који полазе из темена A . Изаберите произвољну тачку C на трећем (средњем) краку и конструишите нормале из тачке C на краке угла

A . То даје као резултат квадрат $ABCD$, заједно са пет сегмената унутар овог правоугаоника, сваки са по једном крајњом тачком на A , чије друге крајње тачке представљају пресеке поменутих пет кракова са двама странама BC и CD квадрата $ABCD$. Посматрајмо теме C и пет испрекиданих дужи као ротационе симетрије тачке A и пет радијалних сегмената, тим редом, за угао од 180° са центром у тачки O . Даље, опишите четвртину кружнице са центром у тачки A и полупречником чија је дужина $1/3$ дужине дужи AC . Напоменимо, да све конструктивне кораке које смо урадили и које ћемо урадити из темена A све време треба радити по истим инструкцијама и за теме C . Затим, по четвртину кружнице (унутар квадрата) треба описати из темена B и D са полупречником који је подударан са растојањем од темена B до тачке где први зрак конструисан из тачке A сече страну BC . По два права угла у B и D су подељени на четири подударна угла. Пресецањем нових кракова који полазе из тачака B и D и претходно конструисаних кракова који полазе из темена A и C , као што је илустровано у другом приказу у горњем реду Слика 8, добијени су центри кружница чије су тангенте стране квадрата $ABCD$, као и неки од конструисаних кракова. Конструкција нормале из тачке пресека четвртине кружнице са центром у тачки A и петог зрака који је конструисан из тачке A (гледајући од стране AB) резултираће тиме да ћемо добити неке нове тачке на осталим зрацима које ће нам омогућити конструисање једне четвртине 12-лисне звезде са центром у тачки A (горњи десни приказ Слика 8). На сличан начин може се изградити једна четвртина 8-лисне звезде са центром у тачки B , као што је илустровано у првом доњем приказу Слика 8. Као што је илустровано у доњем средњем приказу Слика 8, неке линије су конструисане тако да повежу четири звезде са сваким од углова овог квадрата. Штавише, неки друге линије повезују пресеке четири мала круга са страницма квадрата $ABCD$. Последњи део конструкције, као што се види у доњем десном приказу, јесте да се заврши дезен. Десни приказ на Слици 6 је резултат рефлексације овог украшеног квадрата у односу на стране AB и AD .



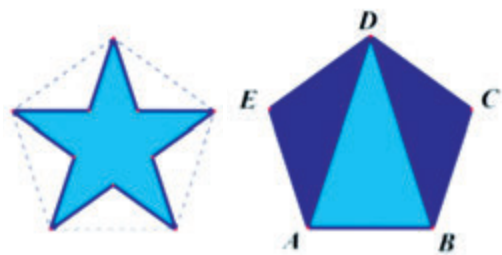
Слика 8: Кораки за геометријски конструкцију Мирза Акбар украшеног квадрата

За израду дезена тетраедра, октаедра и икосаедра, потребан је украшени једнакостранични троугао. Да би се следили типови израде дезена у петоуглу и квадрату, уклесан је $12/4$ звездasti полигон у датом једнакостраничном троуглу. Затим слично корацима на Слици 5, предузети су кораци за украшавање троугла (Слика 9).

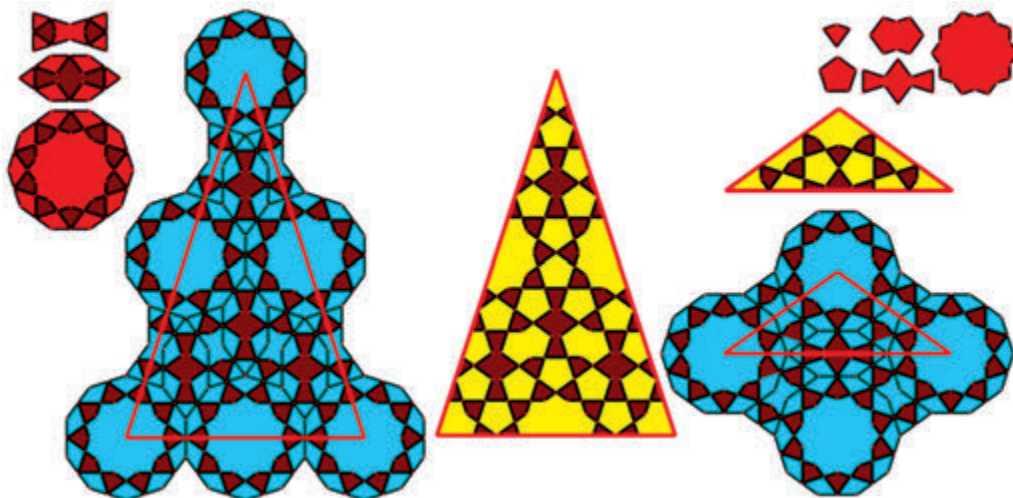


Слика 9: Кораци за геометријски конструкцију украшеног троугла

3.2. Израда дезена Кеpler-Поансоових тела. Површине ових геометријских тела су правиан пентаграм $5/2$ приказан на Слици 10, правиан петоугао и једнакостранични троугао. Међутим, површине се међусобно укрштају и због тога физички модели имају видљиве површине које се разликују од стварних површина. Видљиве површине физичких модела $(5/2, 5)$, $(5/2, 3)$ и $(5, 5/2)$ су или златни троугао ($\triangle ABD$ на Слици 10, једнакокраки троугао са угловима од 72° , 72° и 36°) или тупоугли златни троугао ($\triangle BDC$ или $\triangle ADE$ на Слици 10, једнакокраки троугао са угловима од 36° , 36° и 108°). Дакле, за израду дезена три горе наведена Кеpler-Поансоова полиедра, морамо да украсимо ова два троугла.

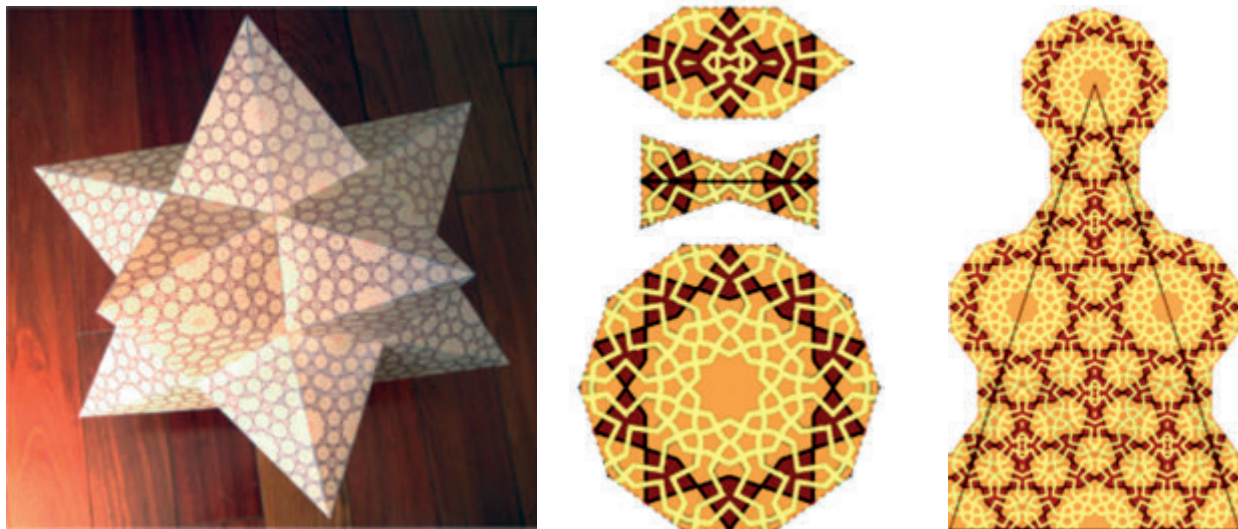


Слика 10: Правиан пентаграм $5/2$ и петоугао подељен на златни троугао и тупоугли златни троугао



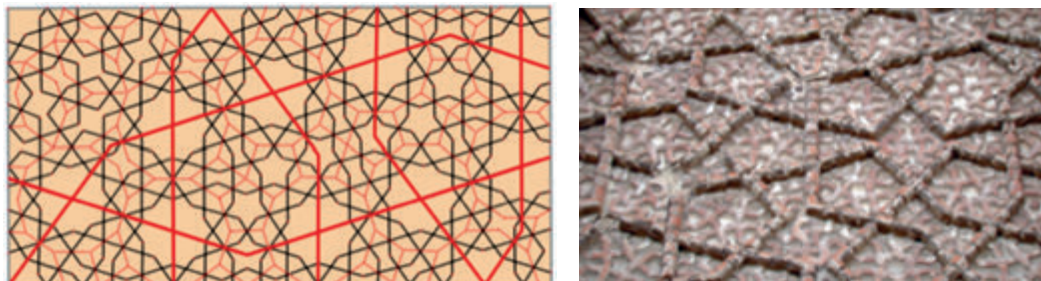
Слика 11: Украшавање златног троугла и тупоуглог златног троугла коришћењем гирих плочица

За ово је коришћен метод модуларности гирих плочица приказан у раду [4]. У раду [4], аутори су предложили могућност коришћења низа плочица, које се зову гирих плочице (горњи леви угао Сlike 11), које су користиле средњовековне занатлије за припремну конструкцију основног дезена. Образац је онда, у последњој фази, био покриван глазираним *sâzeḥ* плочицама (горњи десни угао Сlike 11). На горњем десном приказу на Слици 11 видимо три гирих плочице, које се користе за конструкцију основног дезена на основу два златна троугла: златног троугла и тупоуглог златног троугла. Након дизајнирања дезена, сви сегменти линија који сачињавају гирих плочице се одбацују (видети два троугла на Слици 11). Онда се *sâzeḥ* плочице, које су приказане у горњем десном углу користе за покривање површине. За свеобухватно објашњење овог и других метода модуларности, заинтересовани читалац се упућује на [8].



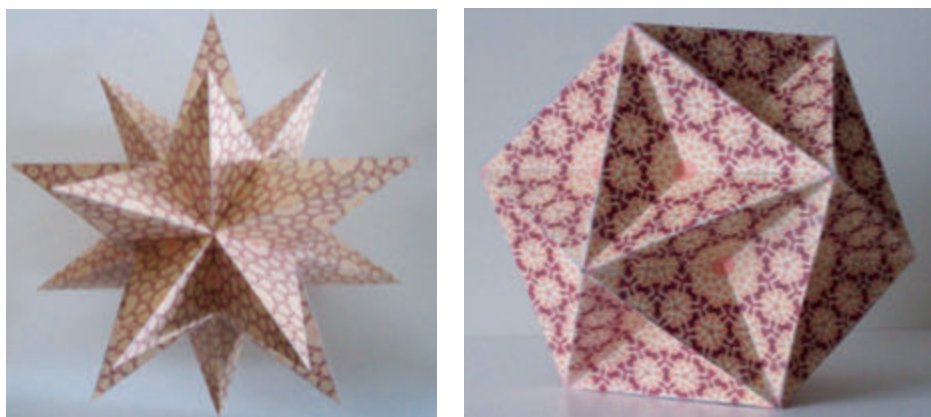
Слика 12: "Плес звезда I", шестоугао, лептир машина, декаграм и златни троугао

Плес звезда на Слици 12 је једно од четири Кеплер-Поансоових тела, мали звездasti додекаедар који је аутор обликовао, а који је украшен плочицама *sâzeh* модула. Гирих плочице су коришћене за креирање уметничке теселације за украшавање површине златног троугла. Слично панелу 28 Топкапи свитка на Слици 13, испрекидане контуре гирих плочица су остале нетакнуте у завршној теселацији. Аутор је такође укључио праволинијски дезен окер боје који се појављују као додатни дезен у облику мале цигле у десетоуганом Гунбад-иКабуд (Gunbad-iKabud) торњу-гробници из 12. века у Марагхи, Иран, као што је приказано на Слици 13. За шестоугаоне и гирих плочице у облику лептир машине (средња колона приказа на Слици 12), ови додатни дезени поседују ротациону симетрију реда 2. Ова симетрија је такође била праћена стварањем ротационе симетрије реда 10 како би се покрила површина десетоугаоних плочица. Важно је напоменути да је коначна теселација морала да се прилагоди трима основним правилима: (1) Свако теме троуглова морало је да буде у центру главног мотива попловавања, декаграма; (2) Теселација треба да буде осно симетрична, (3) Стране троуглова треба да буду осе рефлексии мотива који се налазе на ивицама. Без темељне математичке анализе дезена, било би изузетно тешко, ако не и немогуће, да се створи задовољавајуће уметничко решење.

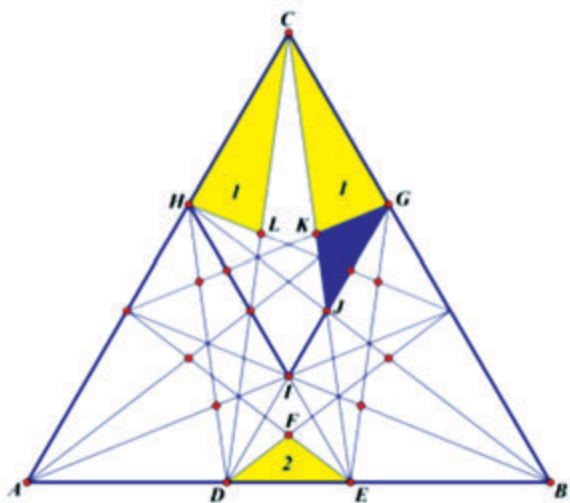


Слика 13: Приказ плоче 28 у Топкапи свитку и дизајн на Гунбад-иКабуд (Gunbad-iKabud) гробници

Слично претходној звезди на Слици 12, Плес звезда II и III на Слици 14 су друга два Кеплер-Поансоова тела, велики звездasti додекаедар и велики додекаедар, који су украшени плочицама *sâzeh* модула.



Слика 14: Плес звезда II-III, украшен велики звездasti додекаедар и велики додекаедар



Слика 15: Шаблон стелације икосаедра

Троуглови који чине велики икосаедар се разликују од претходних троуглова, који су представљали делове правилног петоугла. Тако се може десити да не можемо да украсимо њихове површине помоћу плочица *sâzeh* модула. Да бисмо направили два троугла, морамо да почнемо са једнакокрачним троуглом и да поделимо његове ивице тачкама у складу са златним пресеком како би створили шест нових темена на ивицама. Затим их повезујемо да направимо „дезен стелације икосаедра“ као што је приказано на Слици 15 [11]. Два троугла 1 и 2 су жељени троуглови (или 1 и $\triangle JKG$, који је подударан са троуглом 2). Остаје отворено питање да ли можемо наћи решење за поплочавање *sâzeh* модулом или је такво решење немогуће.

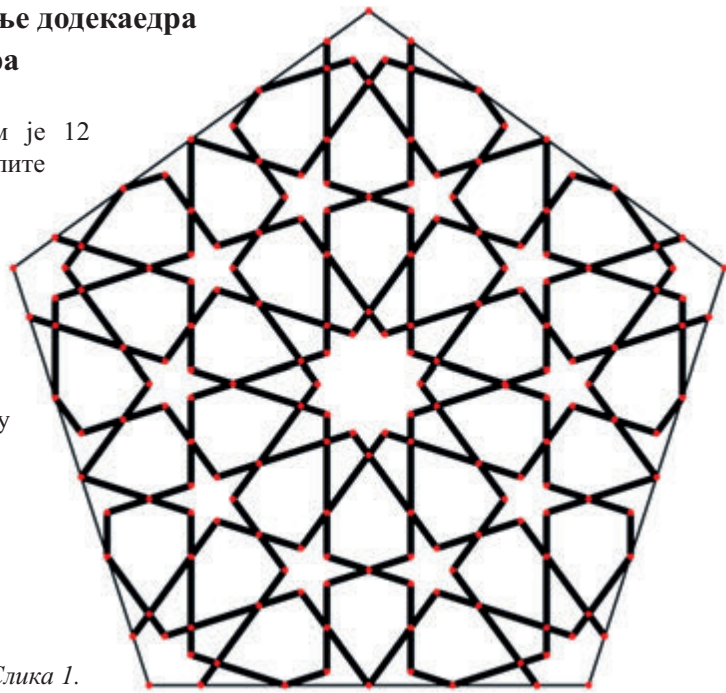
Референце

- [1] Bourgojn, J., Arabic Geometrical Pattern & Design, Dover Publications, Inc., New York, 1973.
- [2] Bridges Mathematical Art Exhibitions: <http://bridgesmathart.org/bridges-galleries/art-exhibits>, 2014.
- [3] Hart, G.W., <http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/vp.html>, 1996.
- [4] Lu, P.J. & Steinhardt, P.J., Decagonal and quasi-crystalline ..., Science 315, 2007, pp. 1106-1110.
- [5] Maheronnaqsh, M., Design and Execution in Persian Ceramics, Abbasi Museum Press, Tehran, 1984.
- [6] Meenan E.B. and Thomas B.G., Escher-type Tessellations and Pull-up Polyhedra: Creative Learning for the Classroom, Bridges Pécs Conference Proceedings, Hungary, 2010, pp 539-544.
- [7] Necipoğlu, G., The Topkapi Scroll: ..., Getty Center Publication, Santa Monica, USA, 1995.
- [8] Sarhangi R., Interlocking Star Polygons ..., Nexus Network Journal, Springer, 2012, pp. 345-372.
- [9] Sarhangi, R. and Séquin, C. H. (Editors), Bridges Conference Proceedings, Winfield, Kansas, 2004.
- [10] Thomas B.G. and Hann M.A., Patterning by Projection: Tiling the Dodecahedron and other Solids, Bridges Leeuwarden Proceedings, the Netherlands, 2008, pp. 101-108.
- [11] Wenninger M., Polyhedron Models, Cambridge University Press, 1974, pp. 41-42.

Активност 1: Радионица за прављење додекаедра коришћењем петоугла Мирзе Акбара

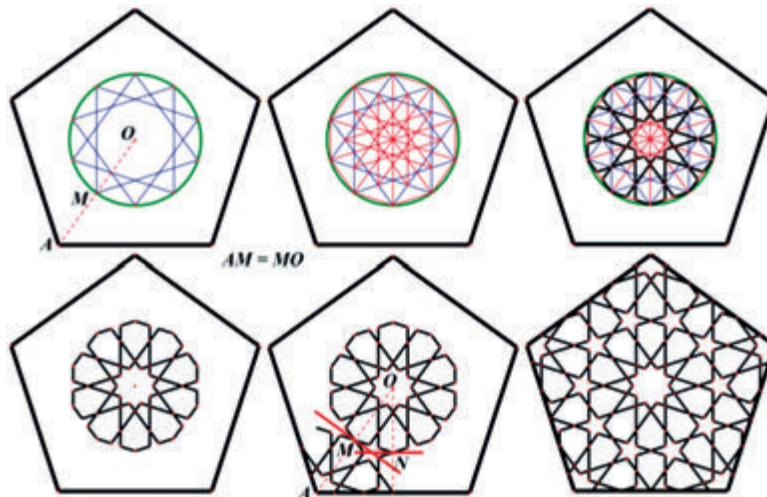
За конструкцију додекаедра потребно нам је 12 украшених петоуглова (Слика 1). Уколико желите да сами направите дезен за украшавање, следите кораке изградње на Слици 2. Такође можемо да закачимо три петоугла један на други да би поступак сечења и лепљења лакше текао. Затим су нам потребне 4 копије прикачених троуглова (слика 3).

За лепљење комада, користите провидну самолепљиву траку.

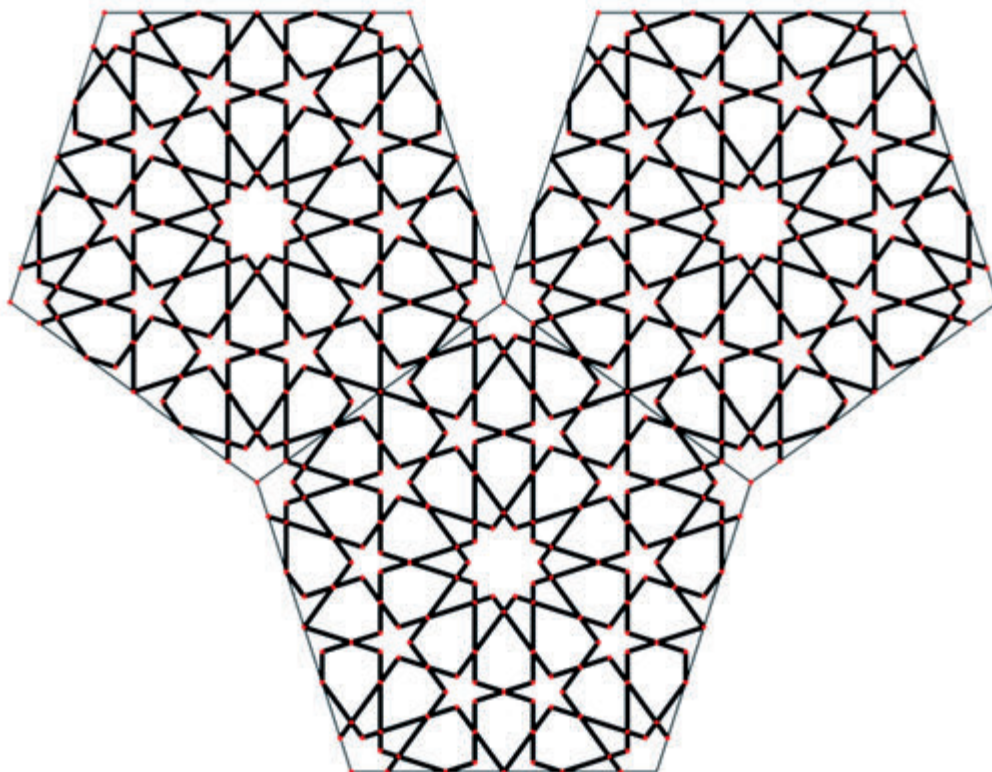


Слика 1.

Слика 2.



Слика 3.



Активност 2: Радионица за прављење украшених Кеpler-Поансоових полиедара

Током ове активности учесници радионице праве три од четири Кеpler-Поансоових полиедара. Ова геометријска тела су мали звездасти додекаедар (Слика 1), велики звездасти додекаедар (Слика 2) и велики додекаедар (Слика 7). За ово, користећи гирлих плочице, правимо облик на Слици 3. Затим са Слике 3 налазимо украшени Златни троугао на Слици 4. Потребно нам је 60 копија троугла на Слици 4 за изградњу малог звездастог додекаедра (Слика 1) и исти број копија за изградњу великог звездастог додекаедра (Слика 2). Такође је могуће да уместо њих користимо Слике 5 и 6. У овом случају сви потребни троуглови за пирамиде су већ приказани. Затим нам је потребно 12 копија многоуглова приказаних на Слици 5 за изградњу Слике 1 и 20 копија многоуглова приказаних на Слици 6 да направимо Слика 2.

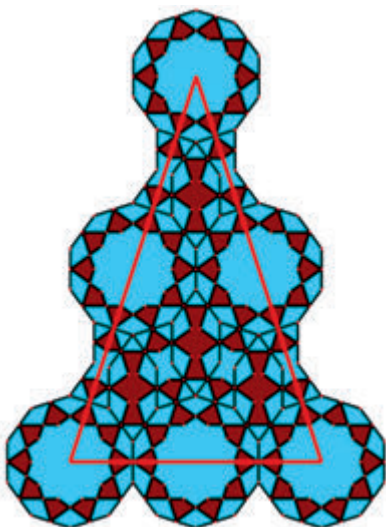
За лепљење комада, користите провидну самолепљиву траку.



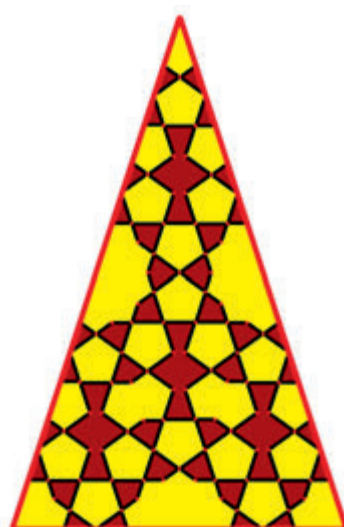
Слика 1: Мали звездасти додекаедар



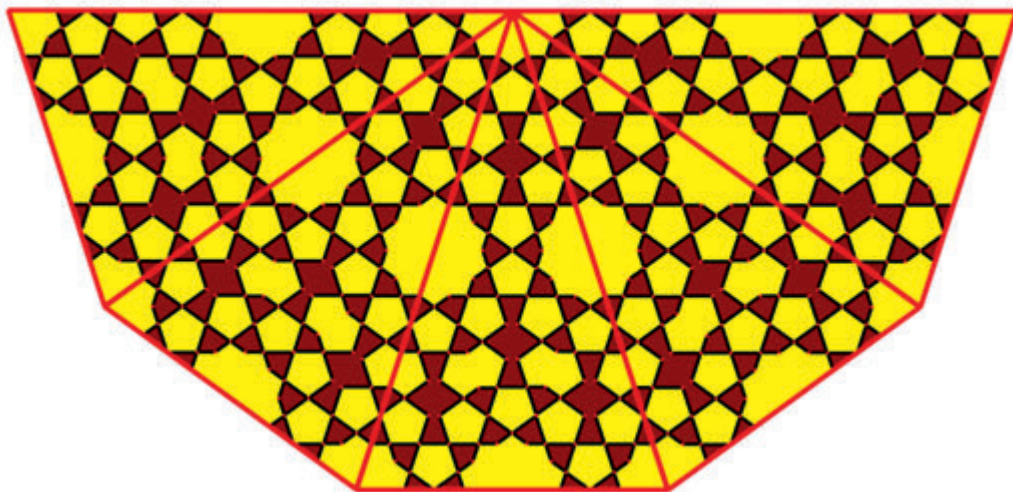
Слика 2: Велики звездасти додекаедар



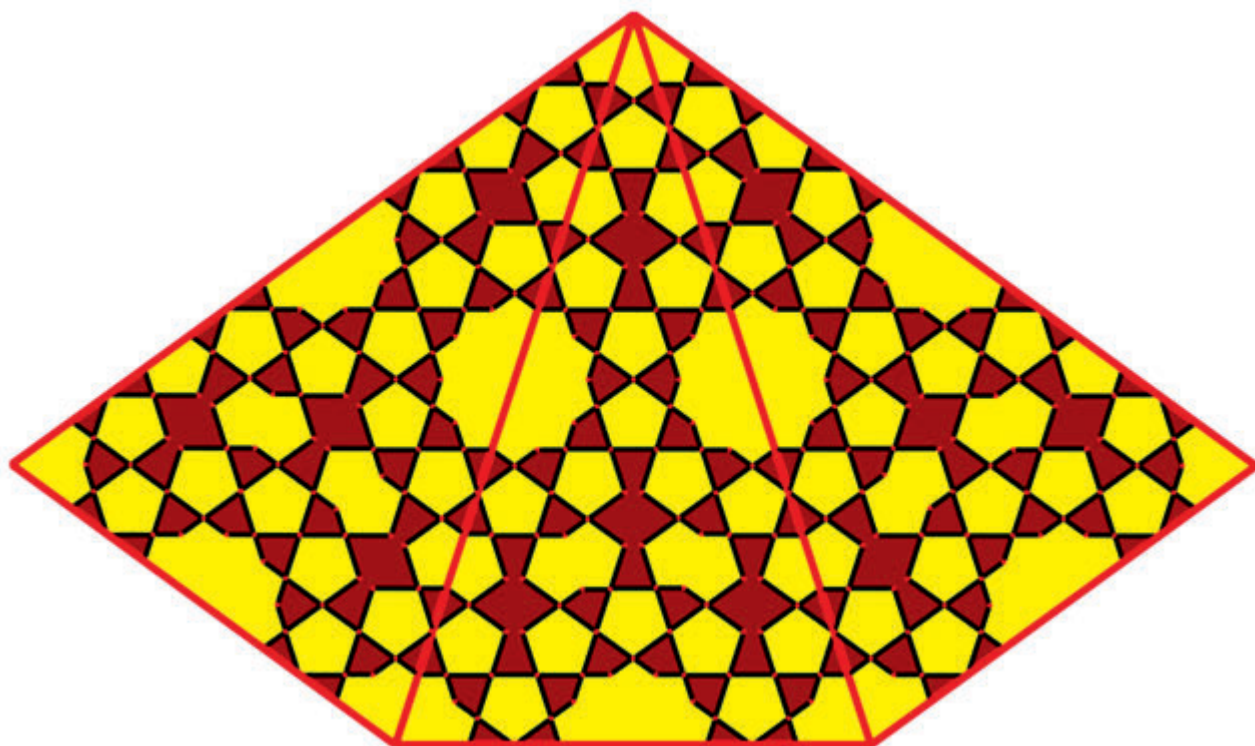
Слика 3: Гирлих дeзeн плочица за златни троугао



Слика 4: Украшен златни троугао



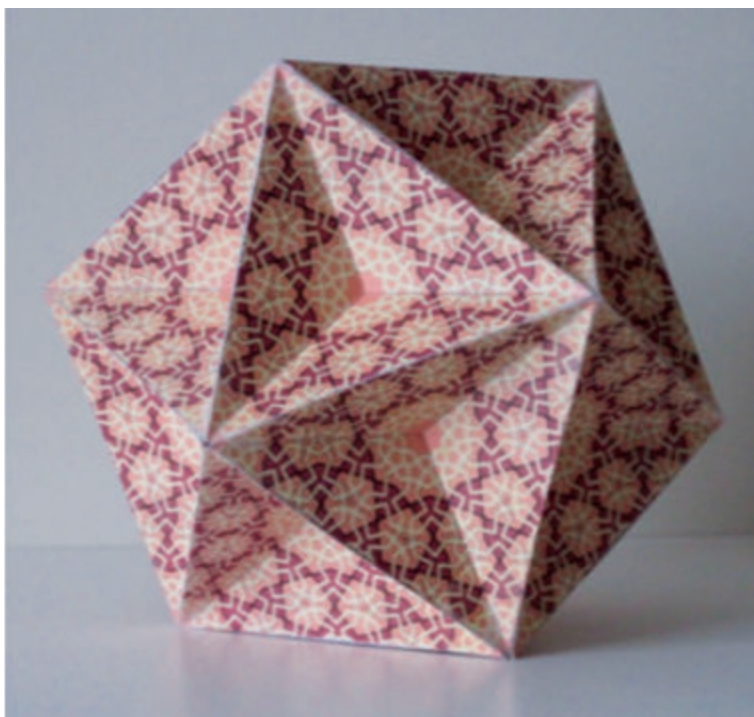
Слика 5: Пет повезаних златних троуглова који праве једну пирамиду једне стране приказане на Слици 1.



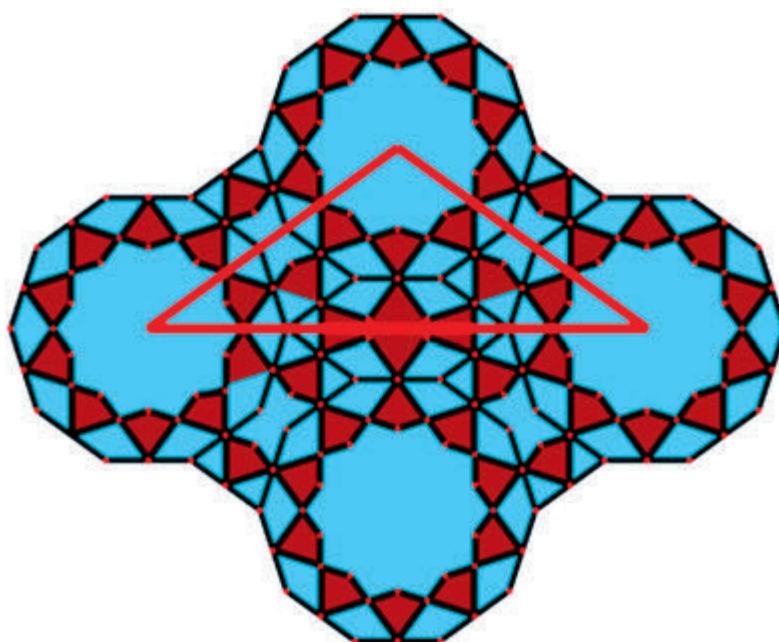
Слика 6: Три повезана златна троугла који праве једну пирамиду једне стране приказане на Слици 2.

За изградњу великог додекаедра (Слика 7) потребно нам је 60 копија тупоуглог златног троугла приказаног на Слици 9. Такође можемо изградити овај полиедар користећи 20 копија полигона приказаних на Слици 10. Имајте на уму да украшена страна сваког троугла у овом случају треба да буде унутар изграђене пирамиде.

За лепљење комада, користите провидну самолепљиву траку.



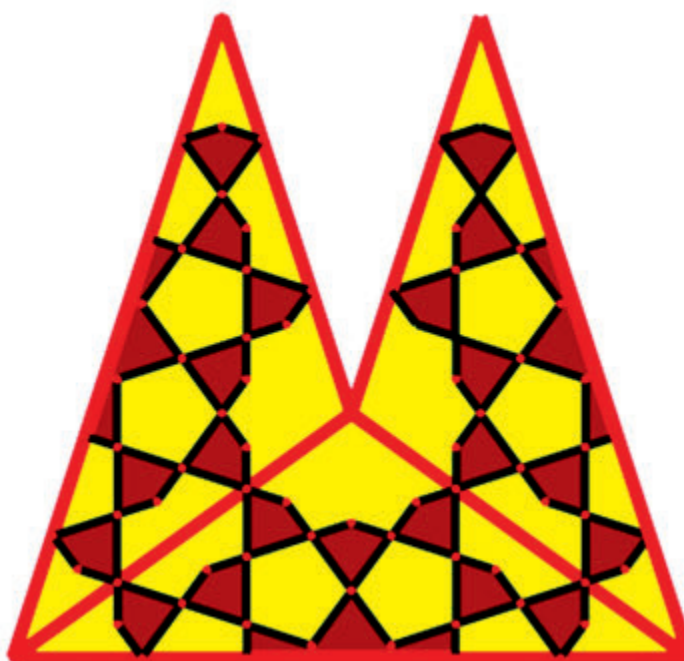
Слика 7: Велики додекаедар



Слика 8: Дезен за тупоугли златни троугао

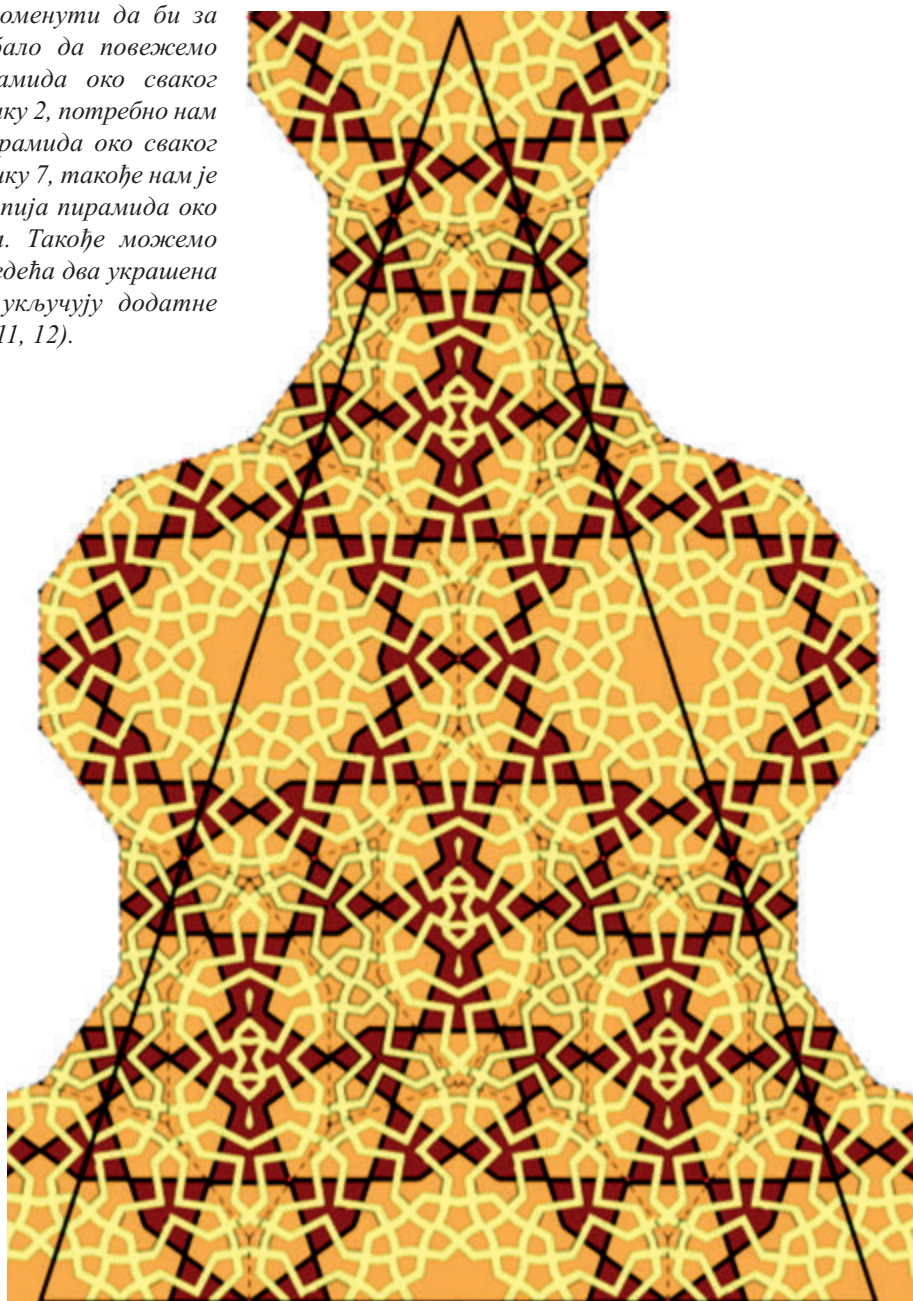


Слика 9: Тупоугли златни троугао

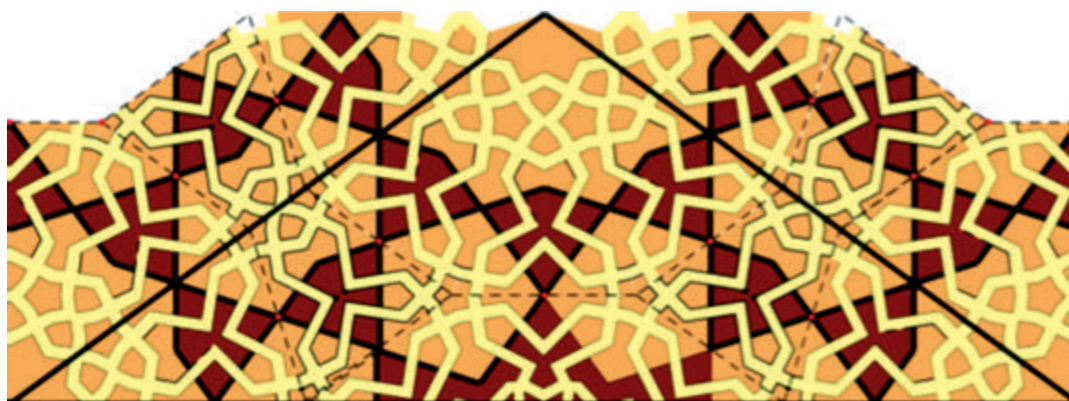


Слика 10: Три повезана тупоугла златна троугла који граде једну пирамиду једне стране приказане на Слици 7.

Важно је напоменути да би за Сliku 1 требало да повежемо 3 копије пирамида око сваког темена. За Сliku 2, потребно нам је 5 копија пирамида око сваког темена. За Сliku 7, такође нам је потребно 5 копија пирамида око једног темена. Такође можемо користити следећа два украшена троугла који укључују додатне дезене (Слика 11, 12).



Слика 11: Украшени златни троугао са додатним линијама



Слика 12: Украшени тупоугли златни троугао са додатним линијама

