

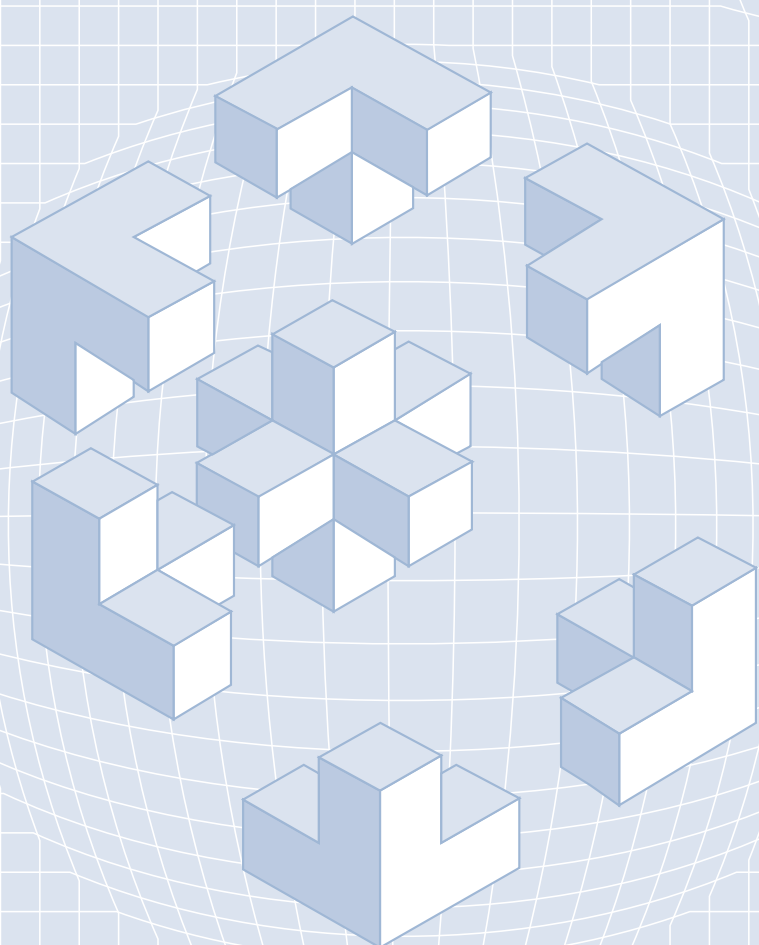
VISUALITY &
MATHEMATICS

EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

Тамаш Ф. Фаркаш

Немогући објекти, парадоксалне фигуре

ВАРЉИВЕ СТРУКТУРЕ,
РАЗИГРАНЕ ПЕРСПЕКТИВЕ





Тамаш Ф. Фаркаш: Према речима Др Ђерђа Дарваша (György Darvas), светски познатог стручњака у области симетрије, стваралачка каријера Тамаша Ф. Фаркаша је изузетна и неконвенционална, колико је год то могуће у савременој уметности. Његов рад пркоси категоризацији. Ако желимо да га ближе опишемо - иако ово никада неће моћи да дочара његову јединственост - онда бисмо можда могли да га упоредимо са делима М. К. Ешера: корен његових креација је увек геометрија. Међутим, док је Ешеров геометрија на неки начин увек повезана са фигуративним приказима (немогућих објеката, животиња и људских фигура), Т. Фаркашов рад избегава било какву везу са фигурацијом. Његова уметност је заснована на геометријским ликовима чистих линија. Он не жели да нас подсећа на стварне објекте или жива бића. Суштина његове слика је приказивање простора и његове структуре у којој доминирају геометријски облици, пројекције

геометријских фигура у равни или немогући објекти. То је нова „супрематистичка“ уметност са краја двадесетог века, али Фаркашов рад нема никакву сличност са његових „супрематистичким“ претходницима. Он се не може сматрати њиховим учеником, пошто се његово фокусирање на основне геометријске облике заснива на његовом сопственом истраживачком раду и искуству. Његове слике и графике су резултат дугогодишње опсежне студије геометрије. Стога је каријера Тамаша Ф. Фаркаша значајна не само са становишта уметности, већ и науке: он не посматра геометрију само оком научника, нити само оком уметника, већ укључује оба виђења. Тиме постиже јединствене резултате који који никада не би били остварљиви само коришћењем традиционалне геометрије. Његови радови се могу користити као илустрација појава у многим другим наукама, које се тумаче на основу математике (као што су кристалографија, физика честица...). То нам омогућава да боље разумемо апстрактно-рационалне резултате који нису доступни чулним облицима перцепције. Фаркаш има јединствен дар, али и поред тога што су његови резултати веома цењени и у научним круговима, наука не може да га прихвати као научника. Он представља научно-оријентисаног ствараоца међу уметницима, а уметника међу научницима.

Веб страница Тамаша Ф. Фаркаша: www.farkas-tamas.hu

Е-пошта: f.farkastamas@freemail.hu

1. Упознајте се са немогућим објектима!

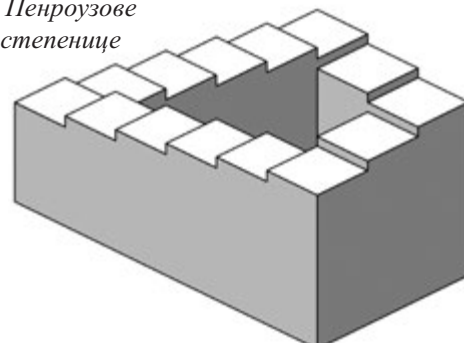
Немогући објекат је један од видова визуелних илузија: дводимензиона слика која би требала да представља раванску пројекцију неког реалног тродимензионог објекта, за коју, након пажљивог посматрања закључујемо да не може бити приказ неког уобичајеног тродимензионог објекта. Познато је неколико примера немогућих објеката из ликовне уметности, али је овај феномен ош увек подједнако фасцинантан и изазован и за психологе и за математичаре.

Немогуће објекте су први описали психијатар Лајонел Пенроуз и његов син, светски познати математичар Роџер Пенроуз у свом раду: Немогући предмети: посебна врста визуелне илузије (1956). Рад је илустрован немогућим троуглом (слика 1) и немогућим степеницима (слика 2), а њих су такође користили у својим делима и шведски сликар Ројтсвард и холандски графичар М. К Ешер.

Слика 1: Пенроузов немогући троугао



Слика 2: Пенроузове немогуће степенице



У случају немогућих објеката постоји специфична кореспонденција између дводимензионог и тродимензионог простора. Стога проучавање и цртање ових геометријских објеката може играти важну улогу у визуелној уметничкој обуци, као и у математичком образовању. Проучавање немогућих објеката не само да помаже у креативном размишљању, већ такође побољшава перцепцију просторне дубине. Осим тога, упознавање са немогућим објектима може помоћи да се разумеју вишедимензиони простори (са више од 3- димензије) и структуре у њима.

Задатак: Проучите парадоксалне просторне креације Тамаша Ф. Фаркаса!

Зашто су те структуре парадоксалне? Размислите о њиховом просторном приказу!

Које делове структура је могуће, а које немогуће конструисати у простору?

Какве одговоре бисте нашли у просторним приказу?



Слика 3: Немогуће тродимензионе фигуре Тамаша Ф. Фаркаша

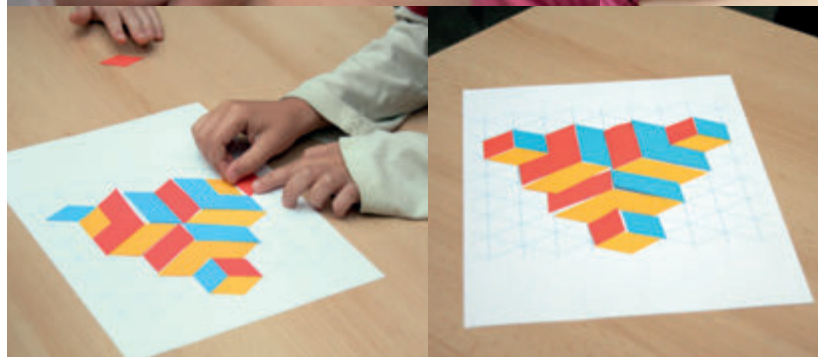
2. Стварање немогућих објеката: да ли је могуће? Покушајте!

Први корак активности је темељно посматрање уметничког дела и његово прецртавање на датом шаблону. Према узрасту и нивоу знања ученика такође је могуће геометријски анализирати дато уметничко дело.

Копије шаблона А и Б које одговарају датом уметничком делу се штампају према броју ученика који учествују. Фигура на шаблону А се сече маказама на елементе дуж црне линије граничних елемената. Након тога, задатак ученика је да поново саставе фигуру на растер-мрежи Б која одговара датом облику. Модератор активности треба да упозори учеснике на правило да два елемента исте боје не могу да се ставе један поред другог. Након завршетка активности треба заједнички дати вербални опис креација, дефинисати њихове специфичне геометријске карактеристике и забележити запажања ученика. Растер мрежа Б се може користити и тако да ученици сами цртају немогуће објекте. Након упознавања са геометријским карактеристикама немогућих објеката, ученици могу покушати да самостално дизајнирају немогуће објекте на растер мрежи Б.

Неке информације које могу да помогну водитељу радионице у откривању геометријских карактеристика сваке фигуре су следеће:

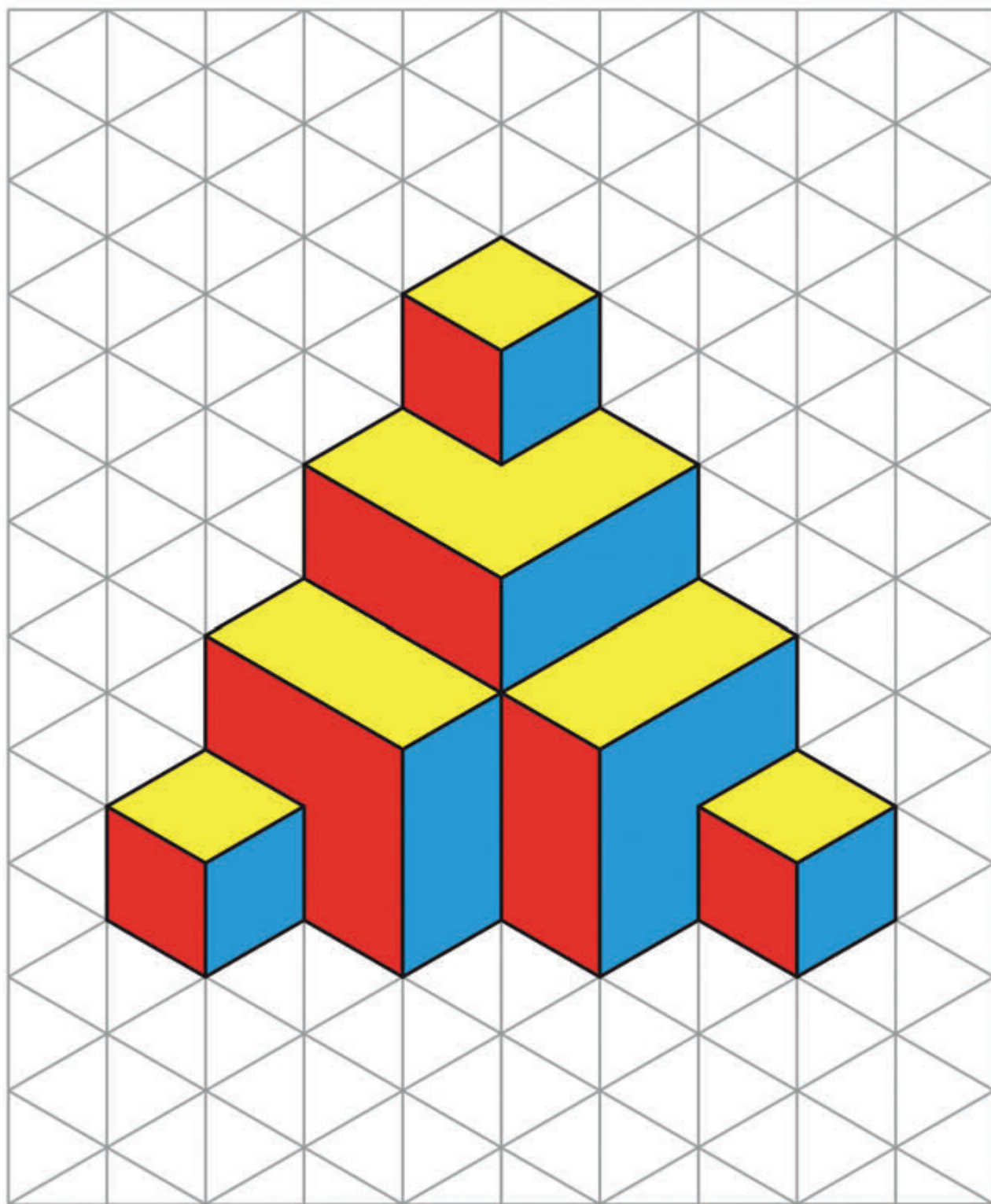
- **Шаблон 1АБ: Пирамида** – приказана тродимензиона фигура се може поделити на три симетрична дела.
- **Шаблон 2АБ: Немогући троуглови** – два немогућа троугла су дијагонално симетрични.
- **Шаблон 3АБ: Немогућа тродимензиона форма** – тродимензиони елементи приказују тродимензиони облик који се затвара у равни.
- **Шаблон 4АБ: Однос немогућих облика** – два различита немогућа облика су ланчано повезана.
- **Шаблон 5 АБ: Немогући објекти** – елементи који изгледају као тродимензиони су ланчано повезани у раванском приказу и представљају једну континуирану немогућу фигуру. Три идентична елемента граде облик који се затвара у равни.
- **Шаблон 6АБ: Однос немогућих облика II.** – Два дијагонално симетрична немогућа просторна облика су ланчано повезани у једну структуру.
- **Шаблон 7АБ: Немогућа фигура** – у дводимензионом приказу тродимензиона фигура се појављује истовремено посматрана и одоздо и одозго, тј. са различитих тачака гледишта, што изазива визуелну илузију.



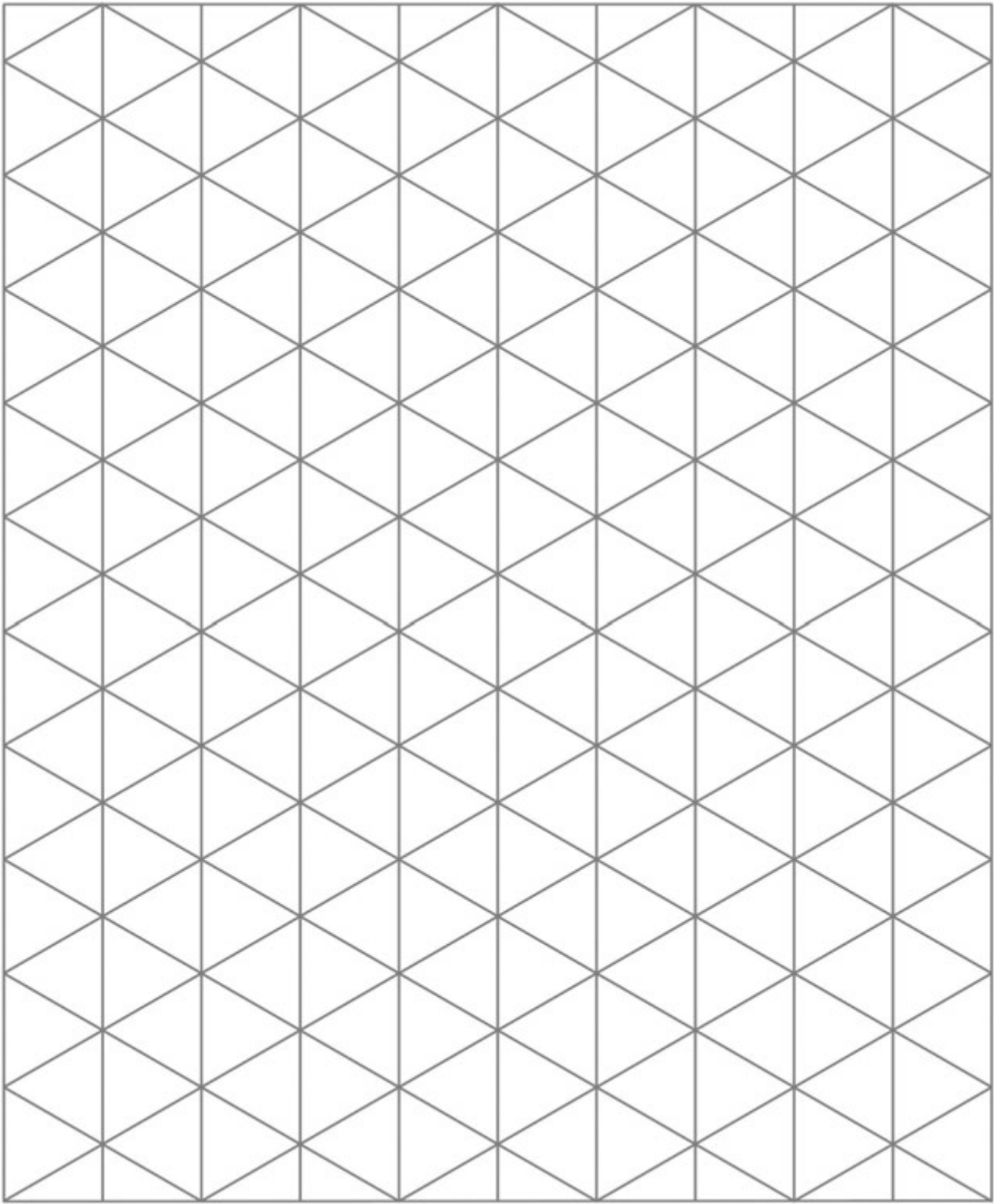
Конструкција пирамиде са основцима нижих разреда у радионици Тамаша Ф. Фаркаша Радионице искуства - Међународног покрета искуственог математичког образовања (Experience Workshop – International Movement of Experience-Centred Mathematics Education) (www.elmenymuhely.hu), дорађај у АНК школи у Печују. Фотографије: Чаба Јозеф Сабо (Csaba József Szabó).

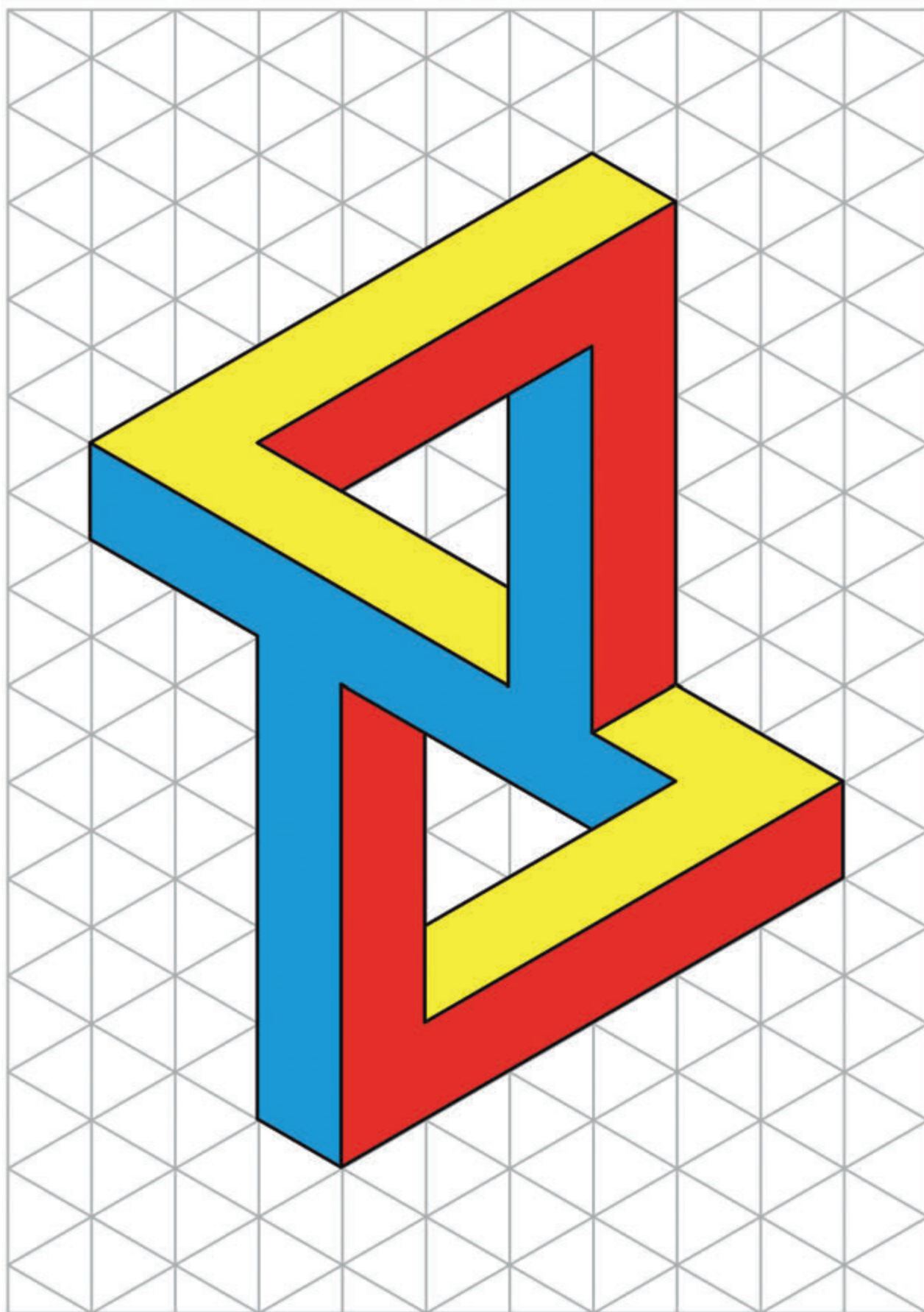


Шаблон 1А: Пирамида

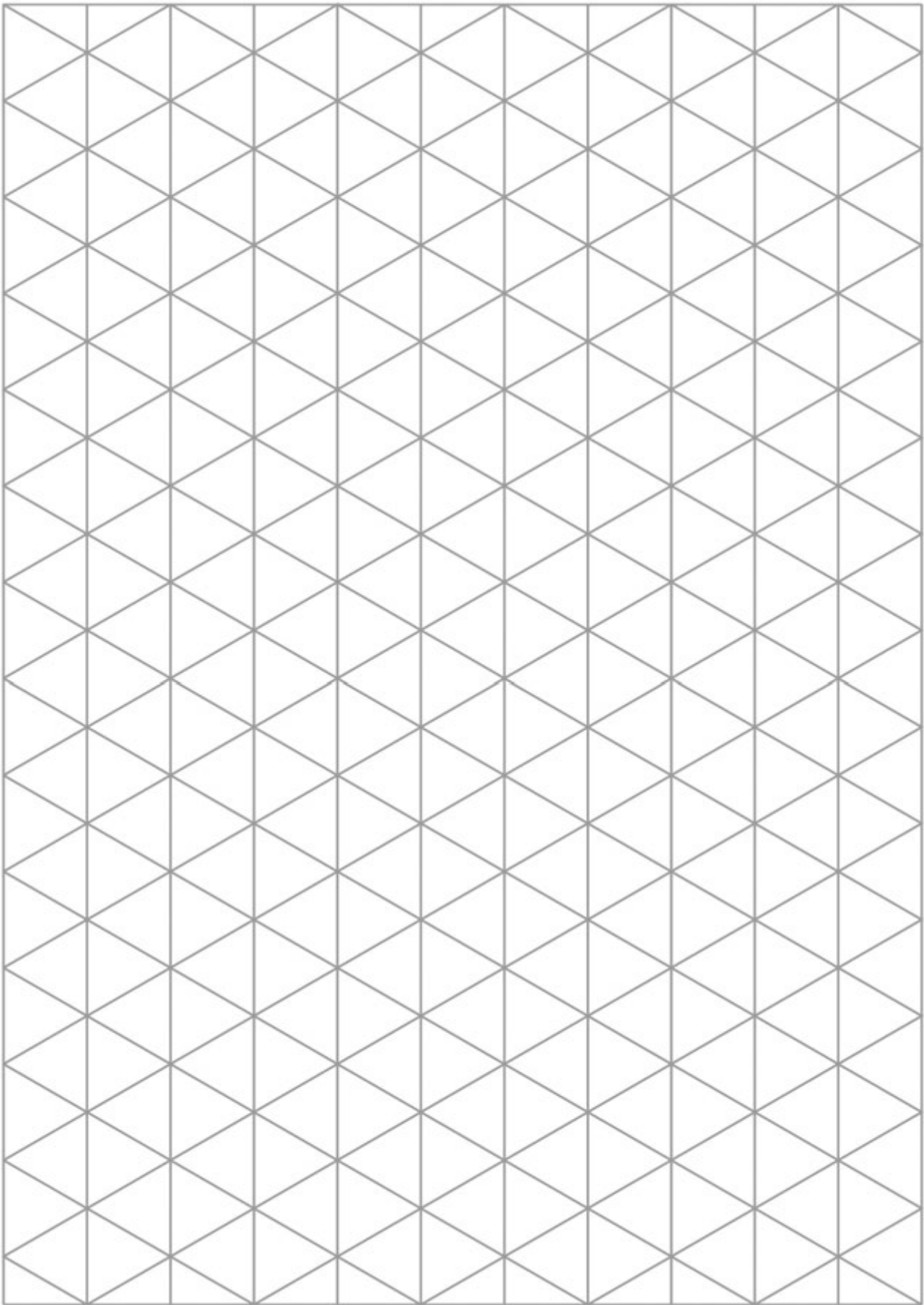


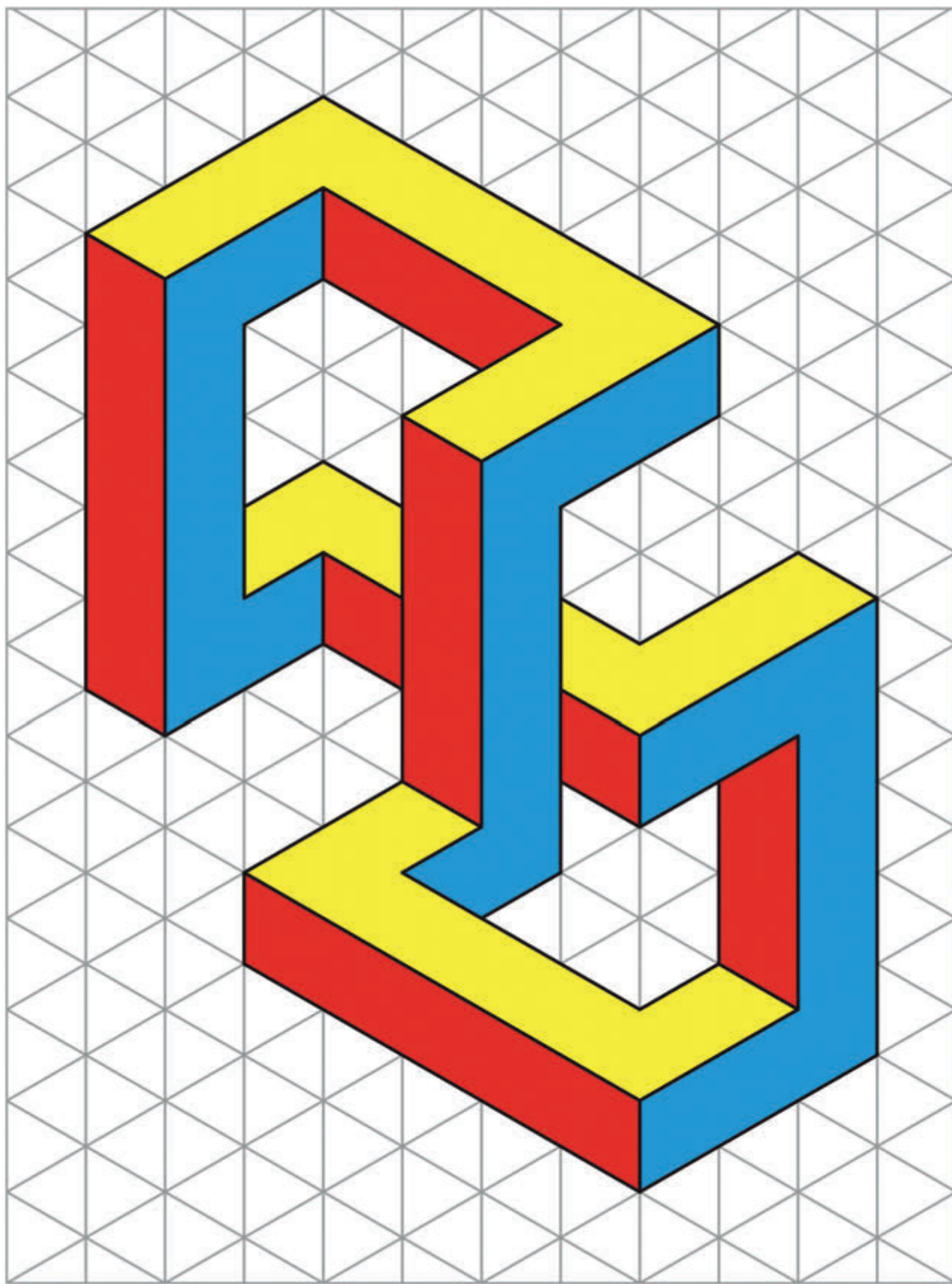
Шаблон 1Б: Шаблон за конструкцију пирамиде



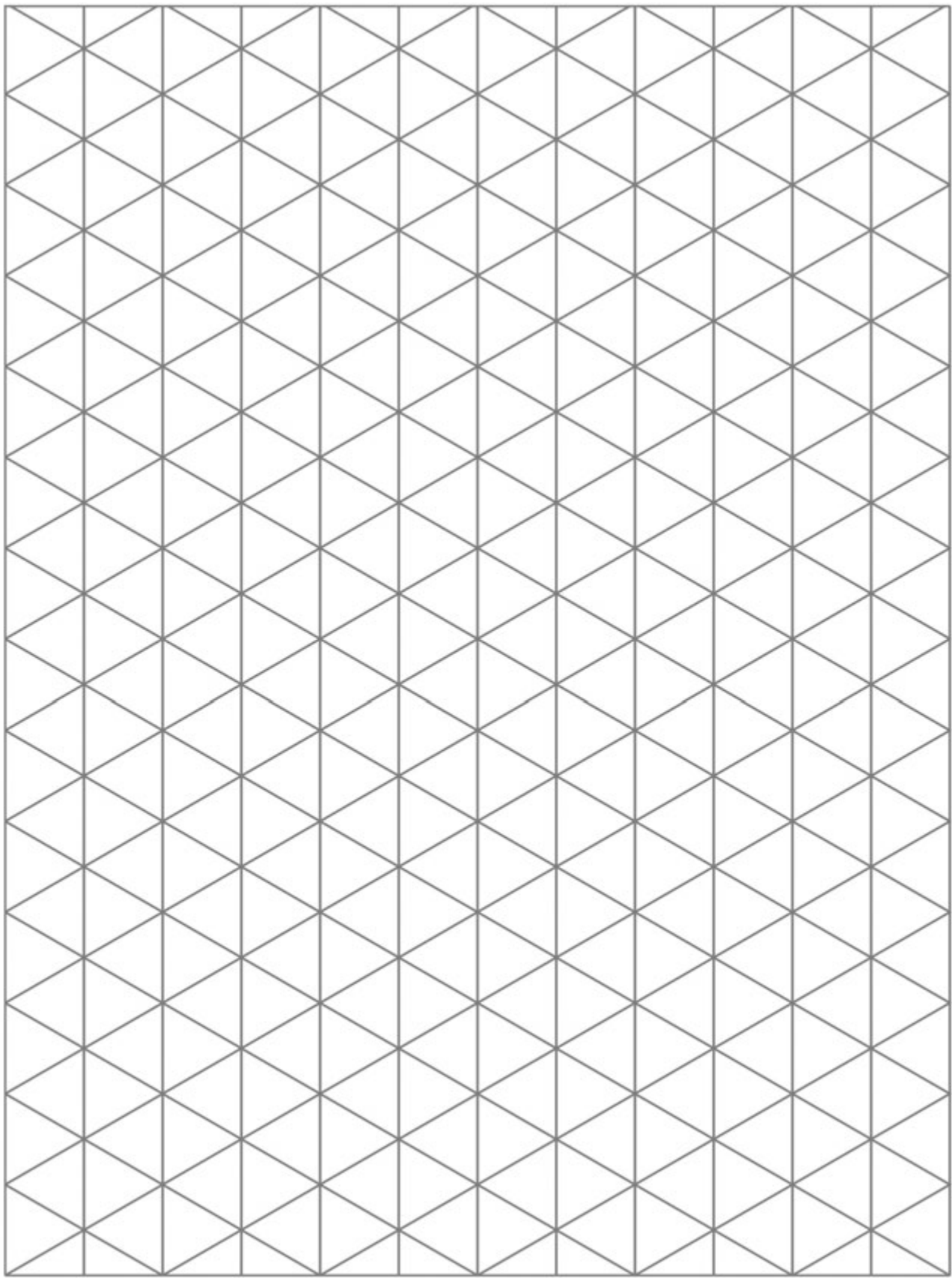


Шаблон 2Б: Шаблон за конструкцију немогућих троуглова

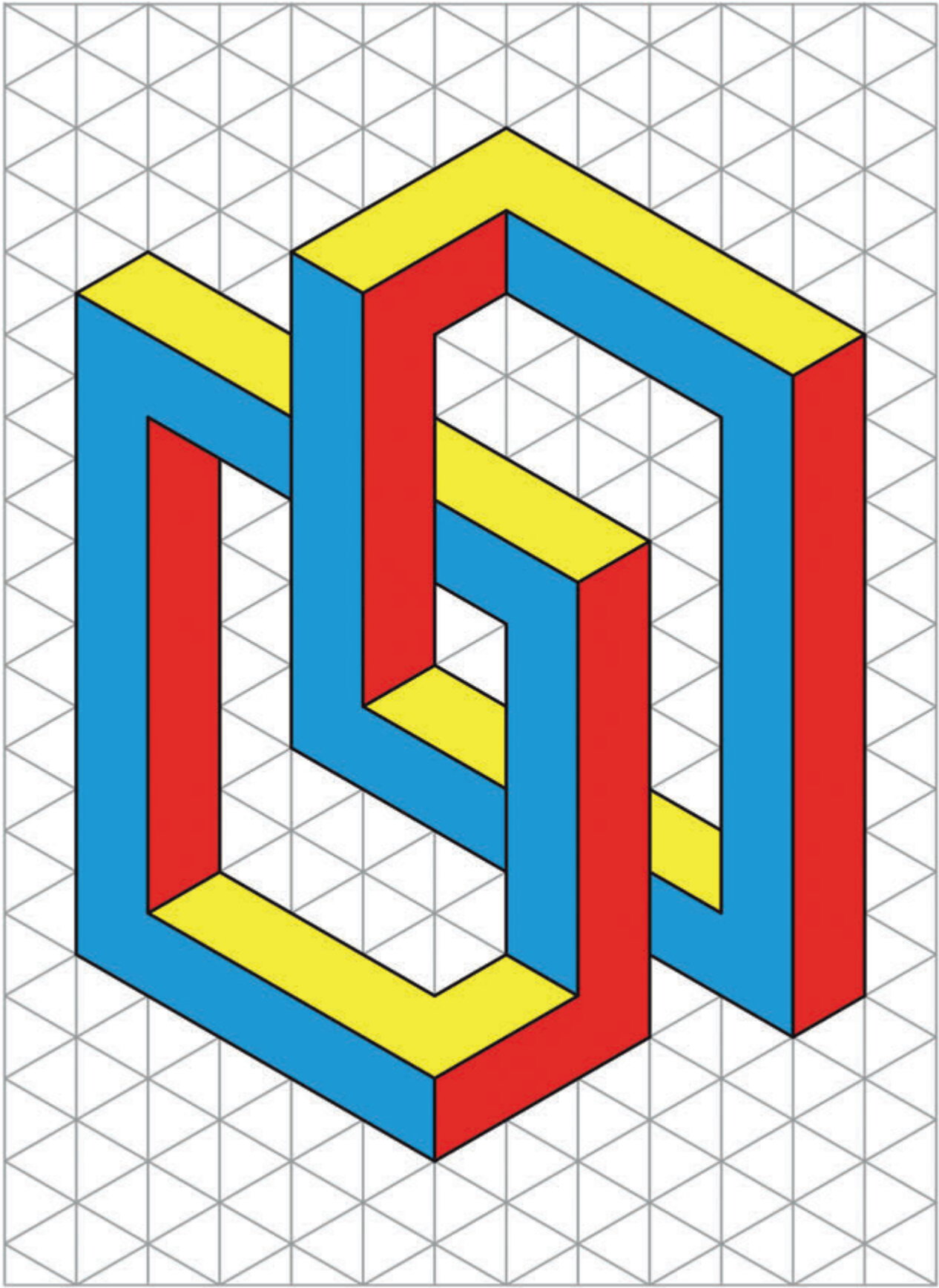




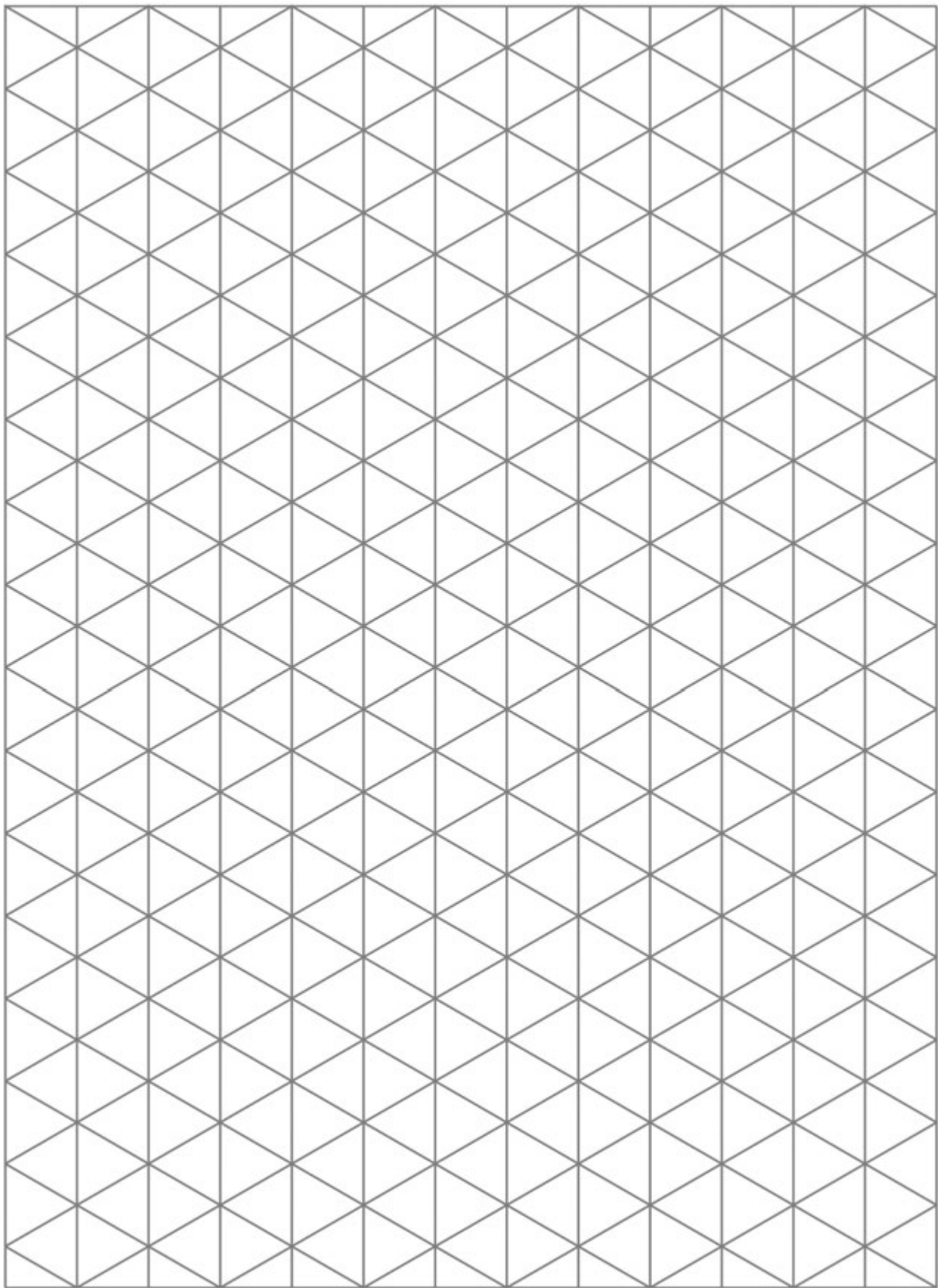
Шаблон 3Б: Шаблон за конструкцију немогућег тродимензионог облика

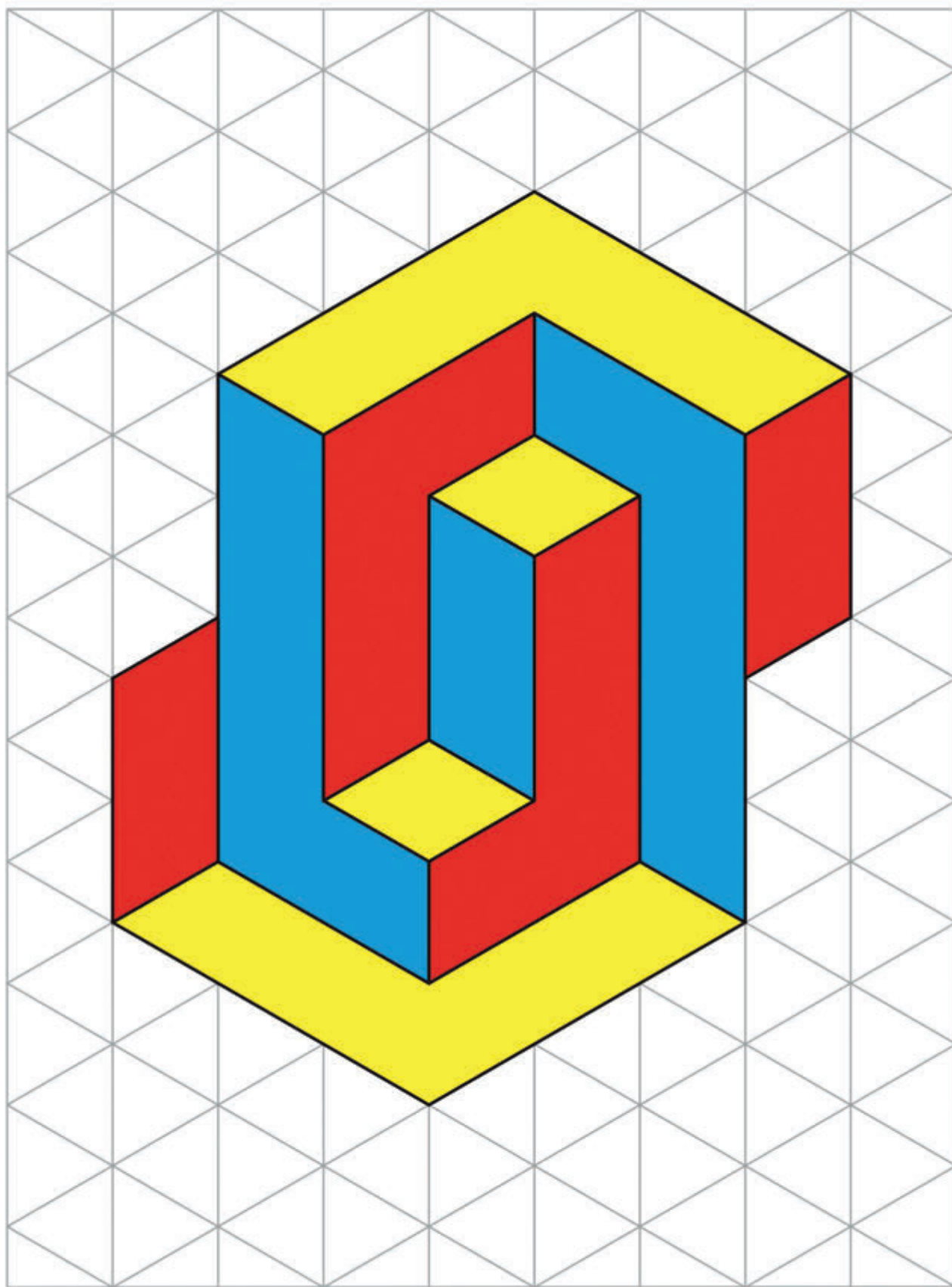


Шаблон 4А: Однос немогућих облика

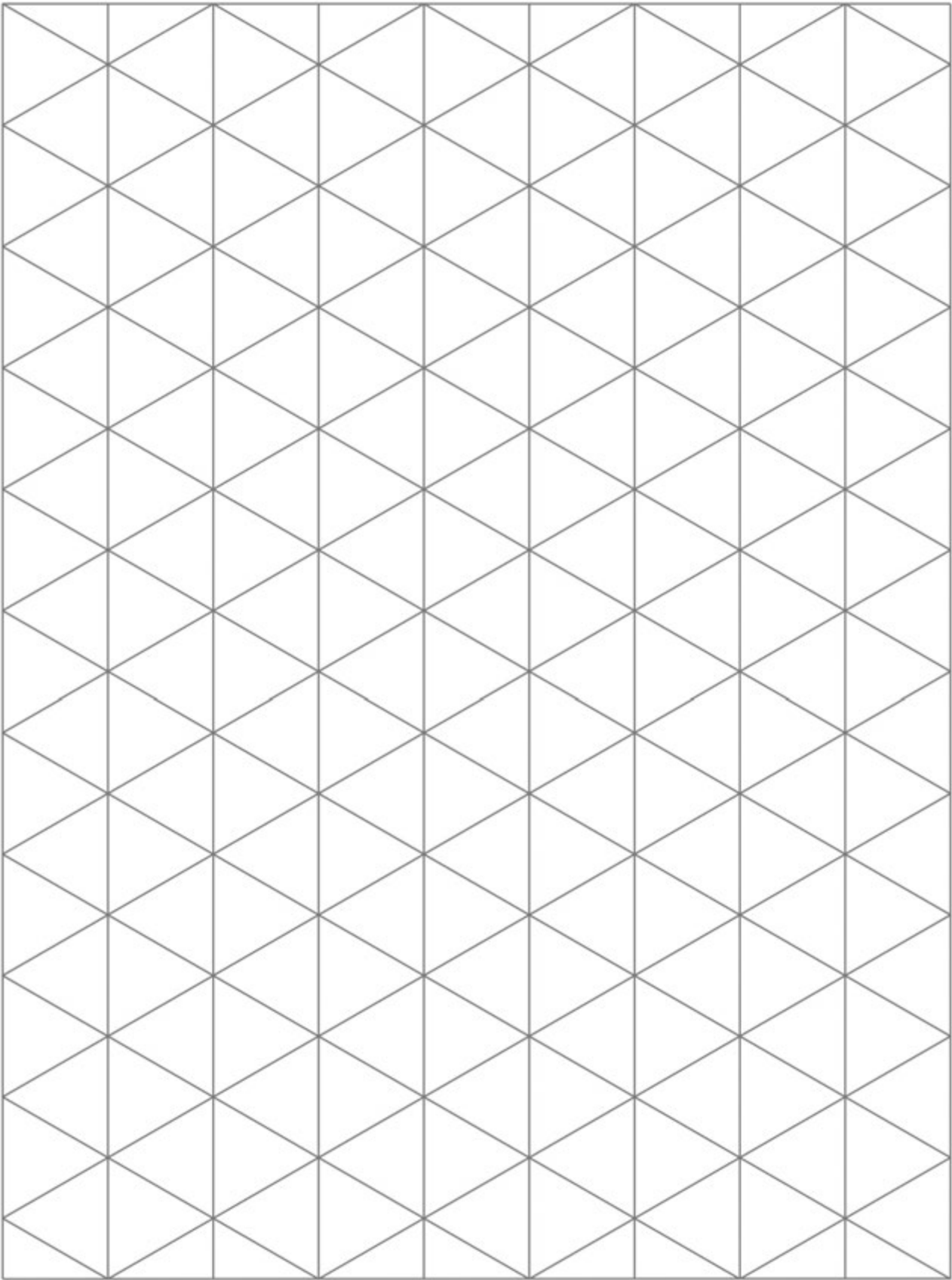


Шаблон 4Б: Шаблон за конструкцију односа немогућих облика

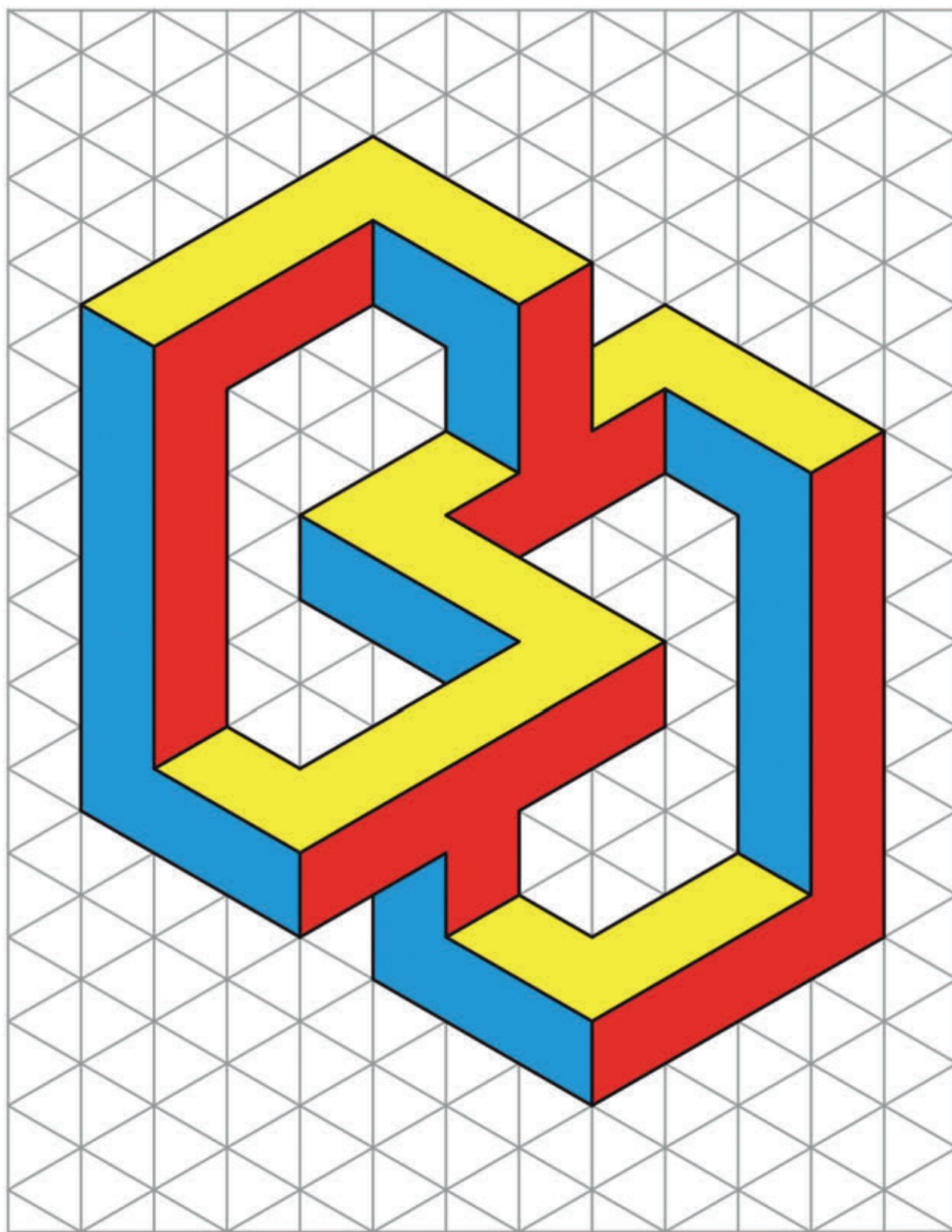




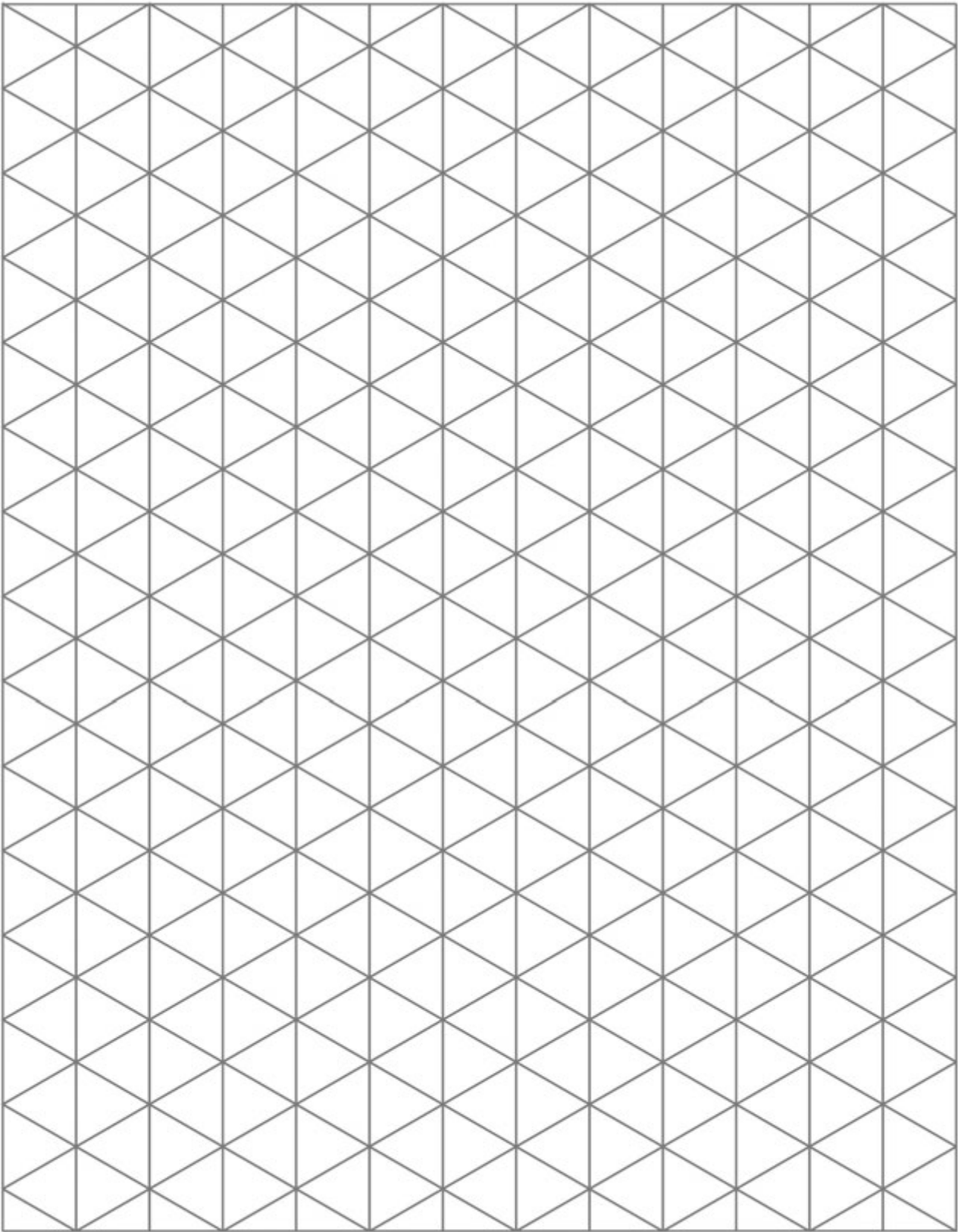
Шаблон 5Б: Шаблон за конструкцију немогућег објекта



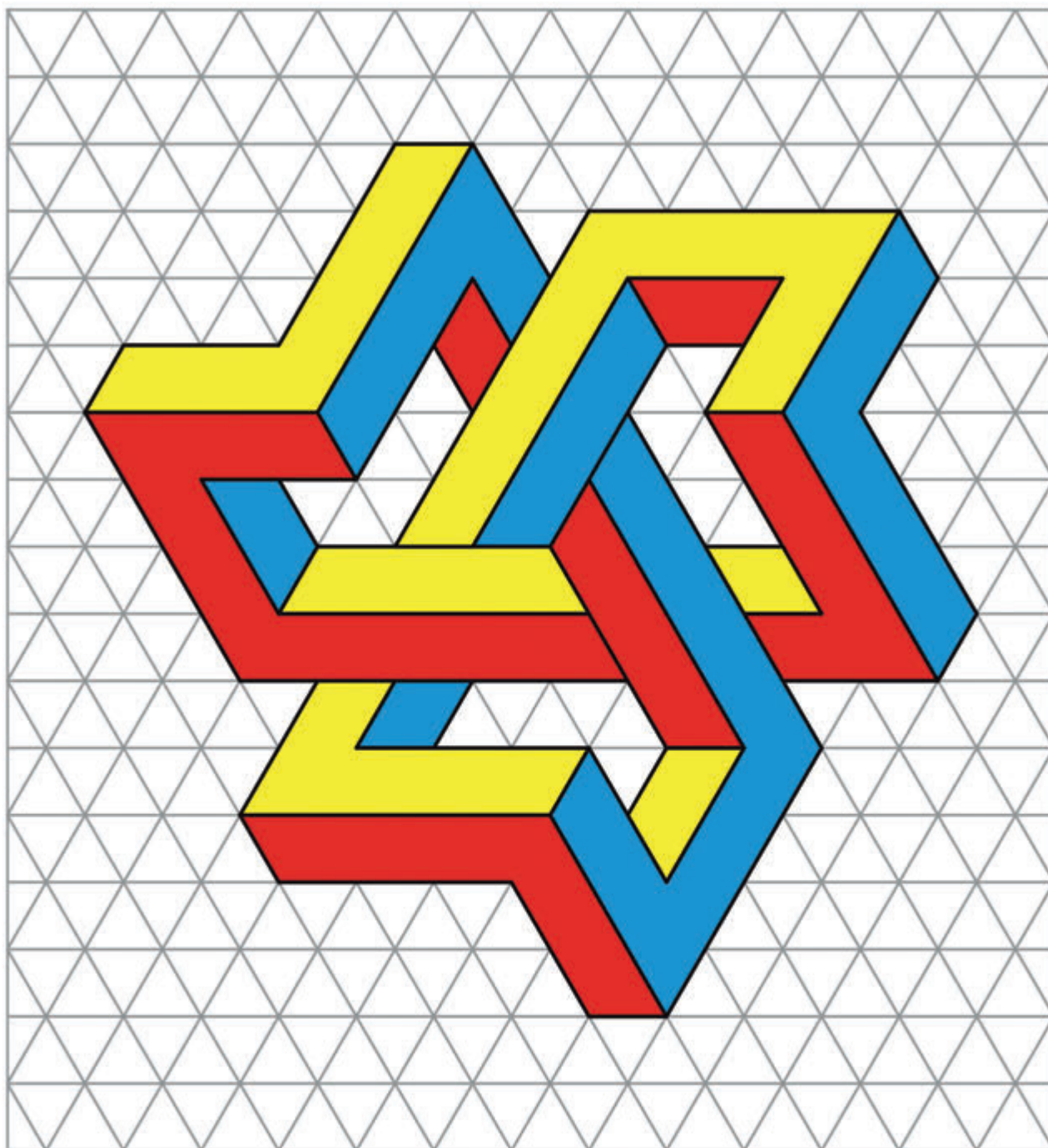
Шаблон 6А: Однос немогућих облика II.



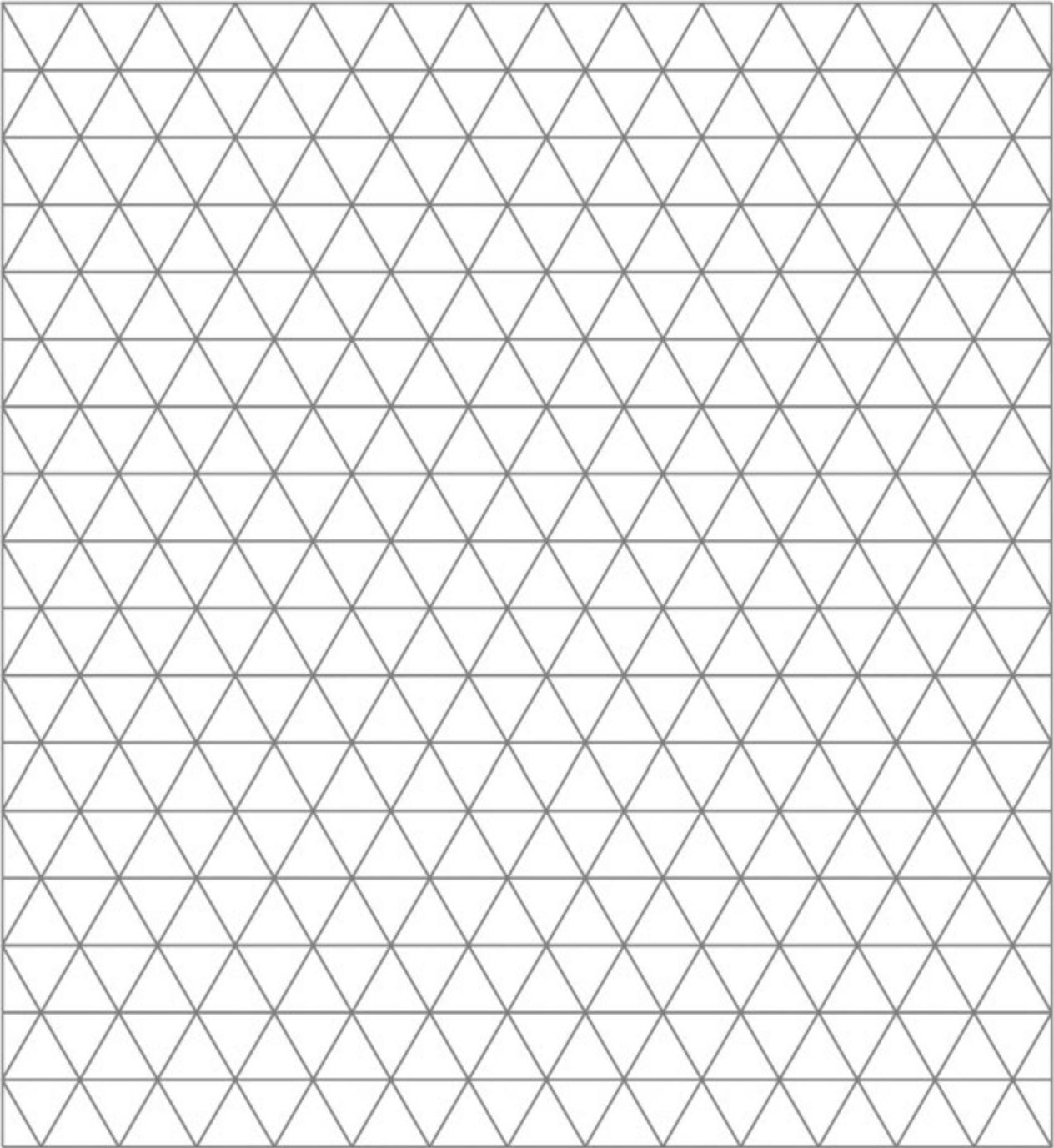
Шаблон 6Б: Шаблон за конструкцију односа немогућих облика II.



Шаблон 7А: Немогуће фигури



Шаблон 7Б: Шаблон за конструкцију немогућих фигура



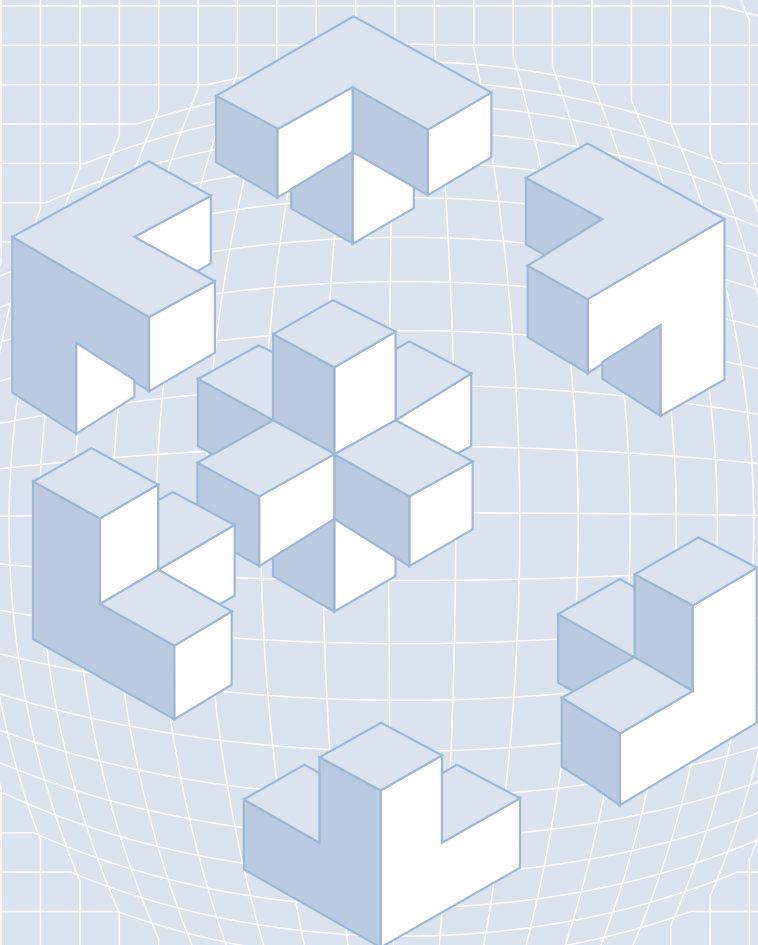


VISUALITY &
MATHEMATICS

EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

Џорџ Глејзер

Хајде да се играмо Индијанаца



ВАРЉИВЕ СТРУКТУРЕ,
РАЗИГРАНЕ ПЕРСПЕКТИВЕ



Џорџ Глејзер (Georg Glaeser) је рођен 1955. у Салцзбургу/Аустрија. Студирао је математику и докторирао геометрију, пре завршетка своје хабилитације у рачунарској геометрији на Техничком универзитету у Бечу. Глејзер је био гостујући сарадник на Универзитету Принстон пре него што је постао редовни професор на Универзитету примењених уметности у Бечу 1998. Аутор је више од десет књига из различитих области компјутерских алгоритама, математике, геометрије, фотографије, еволуционе биологије.

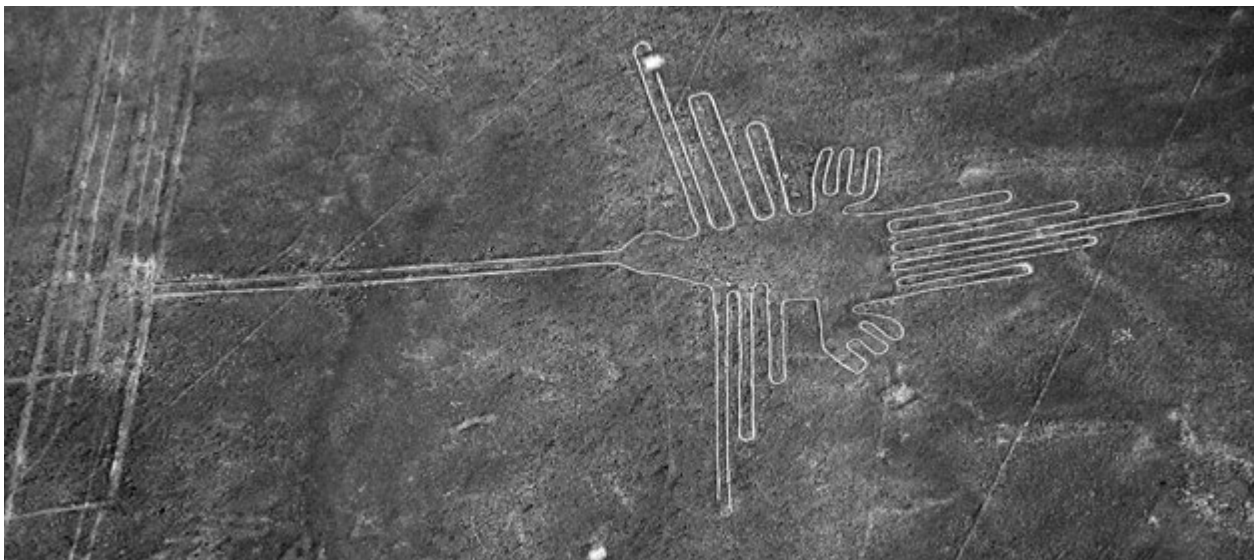


Коаутор: **Лилиан Визер (Lilian Wieser)** је рођена 1985. у Бечу/Аустрија. Под својим псеудонимом „Болони“ она ради као дизајнер текстила у Бечу. Такође студира уметничко образовање на Универзитету примењених уметности у Бечу и обуку за наставника математике, ради комбиновања обеју дисциплина. Са великом радозналешћу је сарађивала са Глејзером у његовом раду о траговима Наска културе.

Увод: невероватна светска баштина

Преколумбовска Наска култура (300 п.н.е. - 600 н.е) која се формирала у јужним приобалним перуанским долинама украшавала је своју грнчарију и везове стилизованим мотивима животиња. Међутим, припадници ове културе су познатији по цртању огромних животињских приказа на сувом пустињском терену, често пречника већег од неколико стотина метара.

Ове слике се у целости могу видети само из авиона (Сл. 1, Сл. 2) и изгледају савршено симетрично посматране под одређеним углом. Ови цртежи су често тумачени помоћу различитих спекулативних теорија. Неки, нпр., претпостављају да је Наска народ користио балоне са топлим ваздухом!



Сл.1 Сто метара дугачак колибри у пустињи.

Wikimedia. Фотографија Бјарте Соренсен (Bjarte Sorensen)

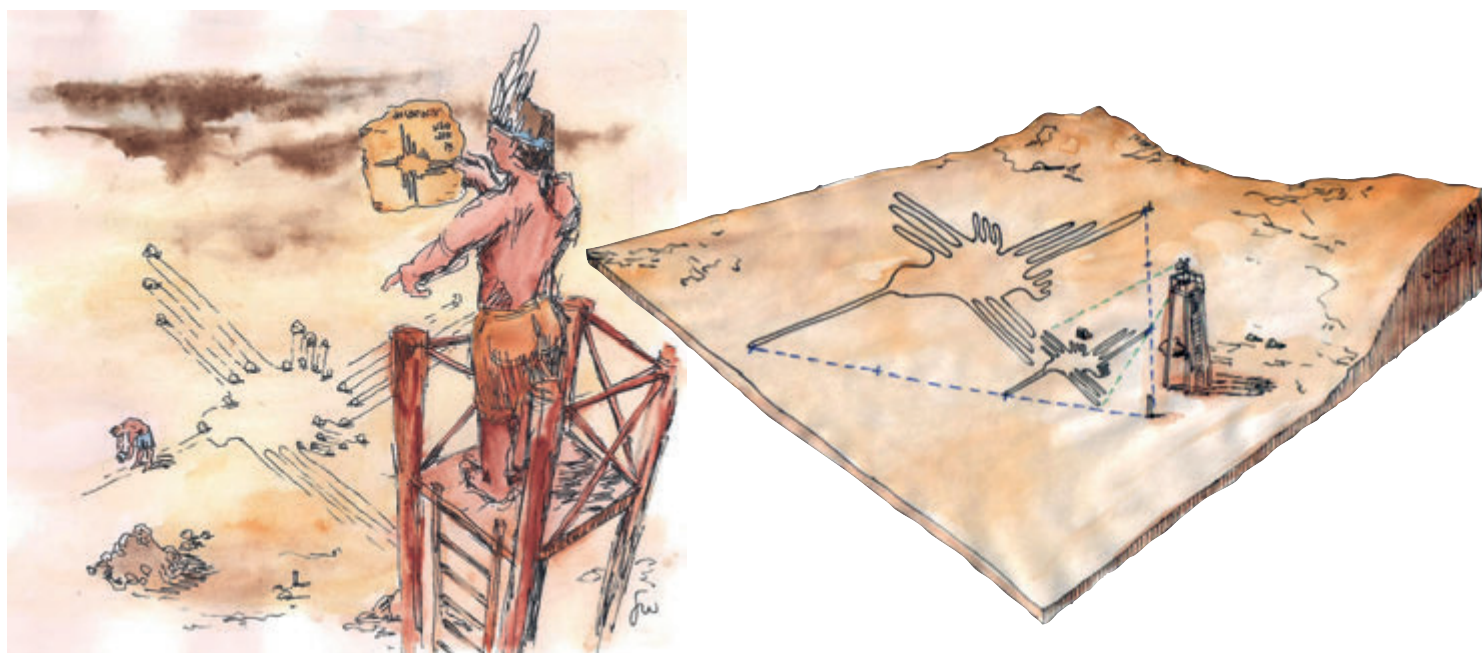
http://de.wikipedia.org/wiki/Nazca-Linien#mediaviewer/Datei:Nazca_colibri.jpg



Сл.2 Мајмун исте величине. Како се такви „геоглифи“ могу нацртати?

Wikimedia. Фотографија Маркуса Леуполд-Ловентала (Markus Leupold-Löwenthal). <http://de.wikipedia.org/wiki/Nazca-Linien#mediaviewer/Datei:NazcaLinesMonkey.jpg>

Огромне животињске фигуре не изгледају симетрично посматране право одозго, већ показују перспективне дисторзије. Парадоксално, симетрија се јавља при њиховом посматрању са одређених позиција на којима су се неки путнички авиони случајно нашли на својој путањи. Без претензија за доношење коначних закључака, може се замислити следећа прича о томе како су ове слике настале.



Сл. 3 Лево: Вођа пројекта говори својим помоћницима где да поставе стене. Десно: Након тога слика мора да се увећа да би добила гигантске димензије. Нацртао Стефан Вирнспергер (Stefan Wirnsperger).

Можда је вођа пројекта (првосвештеник) стајао на неком високом дрвеном торњу (Сл. 3, лево), држећи у рукама скицу симетричног стилизованог приказа животиње. Одатле је усмеравао своје помоћнике како да поставе камене блокове-маркере и тако означе систем линија, које би биле у складу са сликом из његове перспективе. Његови помагачи су, наравно, морали да раде на приличној удаљености од торња, јер би у супротном свештеник морао да има „панорамски поглед“. То би довело до тога да се, животињски мотив чини симетричним посматран са подножја торња, док би гледана одозго из далека слика изгледала искривљено као деформисана перспектива. Да би се нацртала животиња која изгледа симетрично из божанске перспективе, што су можда Индијанци желели да постигну, слика се мора прецизно увећати у одређеном односу. Да би се то постигло, конопца мора да се затегне од једног утврђеног центра до једне од многих контурних стена-маркера. У току процеса пропорционалног увећавања дужина užета мора да се употреби више пута, исти број пута за сваки маркер (Сл.3, десно). Ово захтева рад најмање двоје људи: једну особу која стоји на централној тачки и усмерава другу особу која држи други крај конопца, што обезбеђује да правац затезања конопца буде прав. Након преношења

почетне дужине одређени број пута, тачка се означава другим каменом. Ова техника омогућава да се нацрта огромна контура за релативно кратко време. То је такође могло да омогући Индијанцима да створе те огромне цртеже без коришћења погледа са велике висине (из авиона или балона).

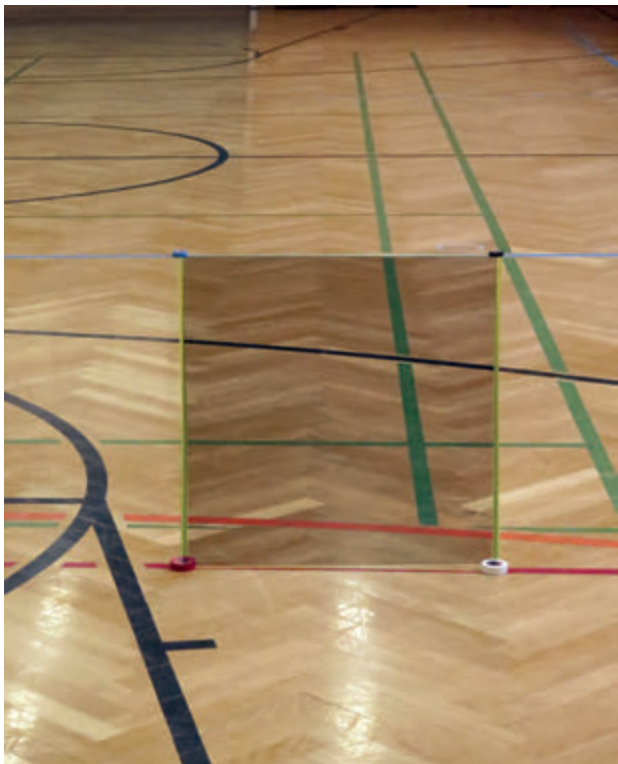
Од квадрата до колибрија

Хајде да извршимо експеримент и да покушамо да се понашамо као првосвештеник (или вођа пројекта) са његовим поданицима (сарадницима). Школска физкултурна сала је савршено место за извођење таквог експеримента (Сл. 4,5,6), који изводимо на следећи начин.

Параметри и инструменти:

- један конопц (дужине око 20 метара);
- ролна широке самолепљиве траке (какову нпр. користе сликари), јер се лако уклања са пода без остављања трагова (или креда, уколико се експеримент врши на асфалту);
- квадратни комад папира (око 7×7 цм);
- најмање три особе (мада ово може бити и групни експеримент);
- ослонац (нпр. мердевине које ће играти улогу торња) где се може поставити тачка гледања и довољно широк простор испред ове тачке (при чему величина простора зависи од димензија увећања).

На пример, вођа стоји у подножју мердевина и држи квадратни комад папира фронтално у својим испруженим рукама, тако да квадрат изгледа правилно (незакривљено) посматран једним оком (упоредите са Сл. 3 лево, само без торња, и сарадници нису тако далеко). Сада сарадници морају да реагују на команде особе која игра улогу првосвештеника. Они лепљивом траком обележавају места на поду која се налазе на линијама погледа првосвештеника и одговарају сваком од четири угла квадрата. У следећем кораку, четири означена места такође треба да буду повезана тракама (ако се ради са кредом, могуће је користити разапет конопц као лењир, како би се нацртале праве линије- стране четвороугла). Резултат на поду у сали је неправилен четвороугао, или трапез ако су две стране полазног квадрата цртежа хоризонталне. Вођа сада замењује квадратни папир у руци фото апаратом који мора да буде што ближи оку гледања (задњи део фото апарата треба да буде паралелан са некадашњом позицијом папира) и фотографише квадрат на поду. Логично, нацртани четвороугао ће се појавити као квадрат на фотографији (али снимљен само са тачке гледишта вође!).



Сл. 4 Лево: Само са једне тачке гледишта, четвороугао ће се видети као квадрат. Десно: Ако промените тачку гледишта (снимања), четвороугао неће бити квадрат. Фотографија Џорџа Глејзера

Повећајте четвороугао

У следећем кораку желимо да удвостручимо (утростручимо, или чак учетворостручимо ако је сала довољно велика) величину четвороугла. Ово чинимо користећи „центар растезања“ S (Сл. 5), - „полазном стајном тачком“ вође пројекта. Растежемо конопца од тачке S до сваке од четири тачке A, B, C, D четвороугла и пропорционално увећавамо те дужине (увећане линије, наравно, морају да осртану праве). Тако смо добили четири нове тачке A^*, B^*, C^*, D^* на двоструком (троструком, четвороструком итд.) растојању од тачке S , а нови четвороугао $A^*B^*C^*D^*$ је сличан полазном четвороуглу $ABCD$, али увећан (са фактором увећења, тј. коефицијентом сличности 2,3,4, итд.).



Сл.5 Увећавање четвороугла (у овом случају са фактором 2), додавањем дужине конопца од тачке S до темена A, B, C, D још једном (тј. удвостручењем растојања SA, SB, SC и SD). Тачка гледишта E је такође пропорционално подигнута (у овом случају на двоструку висину) E^* и обележена на мердевинама. Фотографија Џорџа Глејзера



Може ли се увећани четвороугао на снимку појавити као квадрат ?

Првобитно, мањи четвороугао се видео као квадрат тачно са тачке гледишта вође E (Сл.5). Због пропорционалног увећавања, увећани лик ће се на исти начин видети као квадрат са подигнуте тачке гледишта E^* , која је двоструко виша (или троструко, четвороструко, итд.). Дакле, ако се сада попнемо по мердевинама до висине E^* и фотографисемо одатле, увећани четвороугао ће се појавити као квадрат. Међутим, са ове нове тачке гледишта мањи четвороугао се више неће видети (или појавити на новом снимку) као квадрат (Сл.6).

Сл.6 Ако се попнемо по мердевинама до двоструке висине E^* , већи (= горњи) четвороугао ће се сада видети (и појавити на новом снимку) као квадрат. Фотографија Џорџа Глејзера

Какве везе има четвороугао са колибријем?

Свака слика може бити „полигонизована“ (сведена на полигонални цртеж), као што су Индијанци урадили са колибријем који се налази у перуанској пустињи. Дакле, после једноставног примера четвороугла, треба имати довољно праксе да се спроведу сложенији експерименти и креирају увећане фигура које су компликованије (на пример, правилни троугао, или правилни петоугао и сл.). Али нису само Индијанци експериментисали са облицима и перспективом. Такође је и француски савремени уметник Жорж Русе (Georges Rousse) применио овај феномен цртајући на фасадама и у просторијама напуштених кућа. У његовим радовима је могуће сагледати принцип централне перспективе коришћен на различите начине. Он је можда створио своје слике само да да би илустровао игру са математичким знањима, геометријским облицима, бојама и локалним условима. Припадници Наска културе су могли да повежу сваку своју слику са изабраном посебном тачком гледања и/или правцем гледања. Можда је то био положај неке "божанске" звезде? Али ово је, наравно, чиста спекулација...

У сваком случају, ово је вежба која нас учи о полигонима, перспективи, пропорционалном увећавању, избору тачака гледишта, угловима гледања, итд. Она то чини и теоријски и практично. Експеримент је врло лако изводљив у школској фискултурној сали или на било ком другом месту које обезбеђује услове за постављање високе тачке гледишта и довољно простора. Алати потребни за ову вежбу су уобичајене ствари (широка самолепљива трака или креда). Као веома једноставан експеримент, овај пројекат нам омогућава да повежемо неколико дисциплина, као што су математика, уметност, географија, историја и археологија.

Литература

Глазер, Георг. 2012. Геометрија и њене примене у уметности, природи и технологији.

Беч/Њујорк (Glaeser, Georg. 2012. Geometry and its Applications in Arts, Nature and Technology. Vienna/New York)

Аренс, Зонке. 2011 Експеримент и истраживање: Образовање као облик експерименталног истраживања света. Билефелд (Ahrens, Sönke. 2011. Experiment und Exploration: Bildung als experimentelle Form der Welterschließung. Bielefeld)

Жорж Русе (Georges Rousse), <http://www.georgesrousse.com/>



VISUALITY &
MATHEMATICS

EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

Кристоф Фењвеш
Илдико Сабо

Изградња геодезијске
куполе и креирање
анаморфоза на Радионици
искуства – Међународног
математичко-уметничког
покрета за математичко
образовање засновано на
искуству



ВАРЉИВЕ СТРУКТУРЕ,
РАЗИГРАЊЕ ПЕРСПЕКТИВЕ



Др Кристоф Фењвеш је истраживач савремене културе на Универзитету Јиваскила (University of Jyväskylä), на Одељењу студија уметности и културе, организатор манифестација у водећој светској организацији која ради на повезивању математике и уметности Мостови(Bridges) (www.bridgesmathart.org), извршни директор међународног удружења Симетрија (International Symmetry Association) (www.symmetry.hu) и руководилац Радионице искуства– Међународног математичко-уметничког покрета за математичко образовање засновано на искуству (Experience Workshop – International Math-Art Movement for Experience-centered Education of Mathematics) (www.experienceworkshop.hu). Његови чланци су објављени у часописима као што су Обавештења америчког математичког друштва (The Notices of the American Mathematical Society), МВА Фокус – Новости америчког математичког математичког удружења (ММА Focus – News magazine of the Mathematical Association of America) и зборнику радова конференције Мостови.

Организатор је конференција и манифестација намењених популаризацији математике, кустос изложби, уредник неколико уџбеника и антологија. Његове главне области истраживања су везе математике и уметности у култури и образовању, интердисциплинарна естетика и филозофија.



Илдико Сабо је наставница математике и физике у АНК школи, Мађарска, која је један од оснивача Радионице искуства– Међународног математичко-уметничког покрета за математичко образовање засновано на искуству (www.experienceworkshop.hu). Учествовала је у националним и међународним развојним пројектима за образовање као педагошки координатор покрета. Ради као аниматор и модератор креативних

школских дана Радионице искуства у Мађарској и иностранству. Носилац је неколико стручних признања и награда. Објављује своје резултате везане за са активности у Радионици искуства у научним и стручним часописима, зборницима радова са конференција и популарним часописима.

1 Изградња геодезијске куполе од новина

1.1 Увод

Прва геодезијска купола је планетаријум изграђен на основу нацрта Валтера Бауерсфелда за Џајс компанију у Јени 1922. Неколико деценија касније, Ричард Бакминстер ("Баки") Фулер, чувени амерички архитекта и инжењер је пројектовао и конструисао специфичну структуру геодезијске куполе, која је касније постала популарна у целом свету. Према његовим плановима геодезијска купола је дизајнирана тако да покрије амерички павиљон на Светској изложби у Монтреалу 1967. Та зграда је још увек сачувана у изворном облику: њен пречник је 80 м, а висока је 65 м.

Упоредите ове мере са својом сопственом висином!

Слика 1: Амерички павиљон покривен геодезијском куполом, изграђен за Светску изложбу у Монтреалу према плановима Ричарда Бакминстера Фулера.



Назив "геодезијска купола" потиче од речи Geodos, пошто је купола сферног облика, тј. у облику планете Земље. Пажљиво погледајте Сliku 1 и Сliku 2 и прочитајте натписе испод слика! На интернету потражите детаљније информације о садржају ових слика. Продискутујте о томе зашто је Фулер дао чувеном павиљону у Монреалу и сличним објектима име "геодезијска структура", тј. "структура у облику Земље".



Слика 2: (а) Поштанска марка са Фулеровим портретом окруженим његовим изумима; (б) фотографија Фулера на Светској изложби у Монреалу 1967. како стоји унутар структуре коју је дизајнирао; (в) фотографија транспорта геодезијске куполе хеликоптером; (г) фотографија Фулера који приказује тенсегрити-структуру и тзв. Димаксион мапу (Dymaxion map).

- Више фотографија и додатних информације о Фулеровој каријери и другим проналасцима можете наћи на сајту: <http://arttattler.com/architecturebuckminsterfuller.html>

1.2 Упознајте облик и анализирајте дигитални модел

Геодезијска купола је сферна или делимично-сферна структура у облику љуске или решеткасте куполе засноване на мрежи великих кругова (геодезијских линија) на површи сфере. Геодезијске линије се секу тако да формирају сферне троугле који поседују локалну (троугаону) чврстину и равномерно расподељују оптерећење у оквиру целе структуре.

Наш циљ је да направимо велику куполу од цеви направљених од новина. Купола треба да буде довољно велика да једна особа може да стане испод ње.

Пре него што почнете са изградњом структуре, уз помоћ бесплатног софтвера који се зове Поли (Poly), анализирајте дигитални модел структуре коју намерава да изградите!

Програм Поли је доступан на адреси: <http://www.peda.com/poly/>

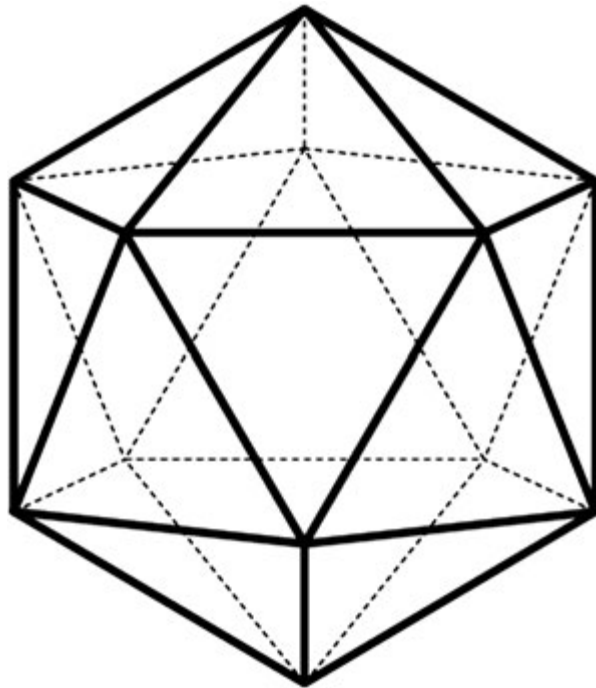
Помоћу програма Поли могу се проучавати различите геодезијске структуре. Прво изаберете опцију Геодезијске сфере и куполе из падајућег менија програма и размотрите неке од икосаедарских геодезијских сфера у под-менију. Лаганим окретањем модела можете детаљно посматрати структуре и ивице тела подељеног на дводимензионе ликове. Окретањем модела све брже и брже стећи ћете утисак да се сфера котрља.

Док се играте у овом програму, посматрајте различите геодезијске структуре и покушајте изведете неке општије закључке о њима!

У чему су сличне и у чему се разликују једне од других?

На шта број учесталости може да се односи?

Изградња Фулерове геодезијске куполе се заснива на просторном геометријском облику, правилном полиедру који се зове икосаедар. Ако пажљивије погледате Сliku 3, можете видети да је свака ивица полиедра исте дужине, а сви троуглови од којих се икосаедар састоји су подударни. Правилни икосаедар се састоји од 20 идентичних једнакостраничних троуглова, а сфера може бити описана око њега. Свака структура оваквог облика може послужити као основа за конструкцију неке геодезијске куполе.

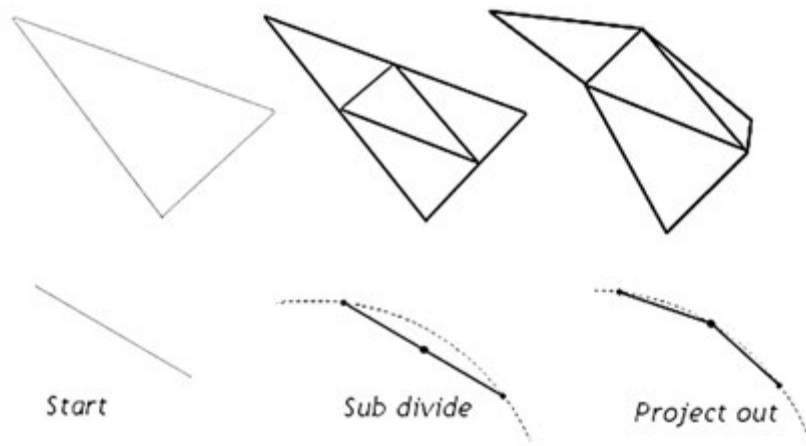


Слика 3: Правилни икосаедар, основа геодезијских купола.

Карактеристике које се односе на ивице неке геодезијске куполе су означене бројем учесталости. Због исте дужине ивица, број учесталости било које геодезијске куполе изведене из правилног икосаедра је 1.

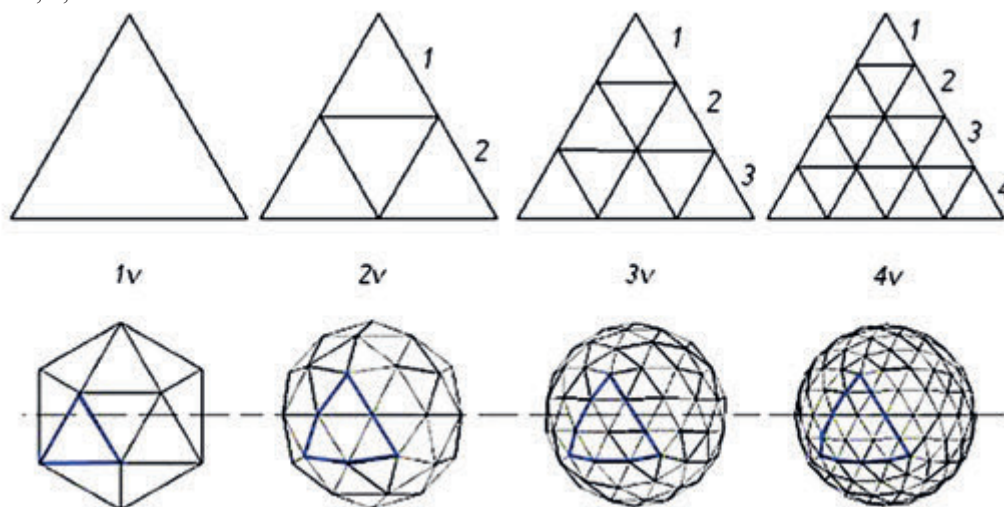
У циљу повећања броја учесталости неке геодезијске структуре, потребно је урадити две ствари.

Прво поделите троугаоне пљосни икосаедра на мање троуглове, а затим пројектујте темена троуглова на замишљену сферу описану око икосаедра, као што можете видети на Слици 4:



Слика 4: Повећање броја учесталости геодезијске куполе конструисане на основу правилног икосаедра (извор: <http://www.geo-dome.co.uk/article.asp?uname=domefreq>)

Геодезијска сфера са високим бројем учесталости може се добити тако да поделимо површину на мање једнакостраничне троуглове. Слика 5 приказује геодезијске сфере засноване на икосаедру са бројевима учесталости 1, 2, 3 и 4:



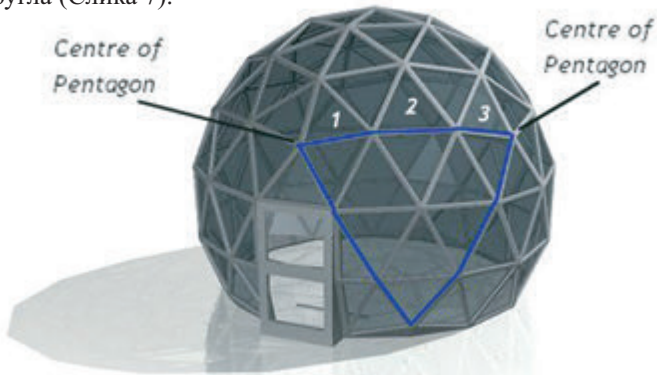
Слика 5: Геодезијске сфере засноване на икосаедру са бројевима учесталости 1, 2, 3 и 4 и њихова конструкција (извор: <http://www.geo-dome.co.uk/article.asp?uname=domefreq>)

Колики је број учесталости геодезијске сферне просторије приказане на Слици 6?



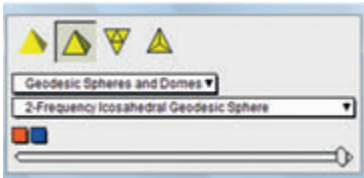
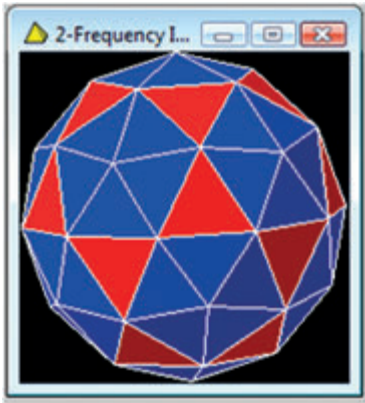
Слика 6: Геодезијска сферна просторија (извор: <http://www.geo-dome.co.uk/article.asp?uname=domefreq>)

Ако желите да израчунте број учесталости једне геодезијске сфере, онда је најбољи начин да одредите центар једног произвољног петоугла на њеној површини и избројите колико "штапића" (ивица) спаја овај центар са центром суседног петоугла (Слика 7).



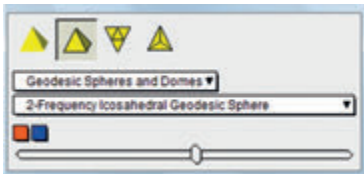
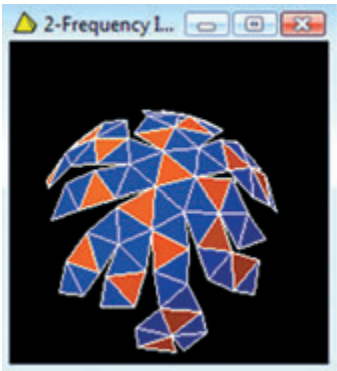
Слика 7: Израчунавање броја учесталости геодезијске сфере (извор: <http://www.geo-dome.co.uk/article.asp?uname=domefreq>)

Уз помоћ програма Поли можете проучавати геодезијске сфере са различитим бројевима учесталости (Слика 8).



Слика 8: Приказ геодезијске сфере са бројем учесталости 2 у програму Поли.

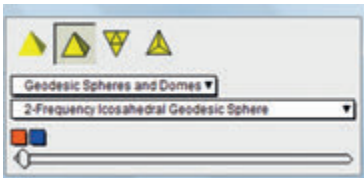
Померањем курсора можете размотати геометријска тела, тј. добити њихове раванске мреже. На тај начин, из простора прелазите у раван. (Слика 9).



Слика 9: Размотавање геодезијске сфере померањем курсора. Сплљивањем одговарајућих ивица раванске мреже добијамо (картонски) модел полиедра.

Курсор се може померати тако да се може добити "спљштено" геометријско тело, тј. његова раванска мрежа. (Слика 10).

Приметићете да је најмања димензиона јединица на коју је површина подељена правилни (једнакостранични) троугао. Можете да израчунате од колико се једнакостраничних троуглова састоји нека геодезијска структура.



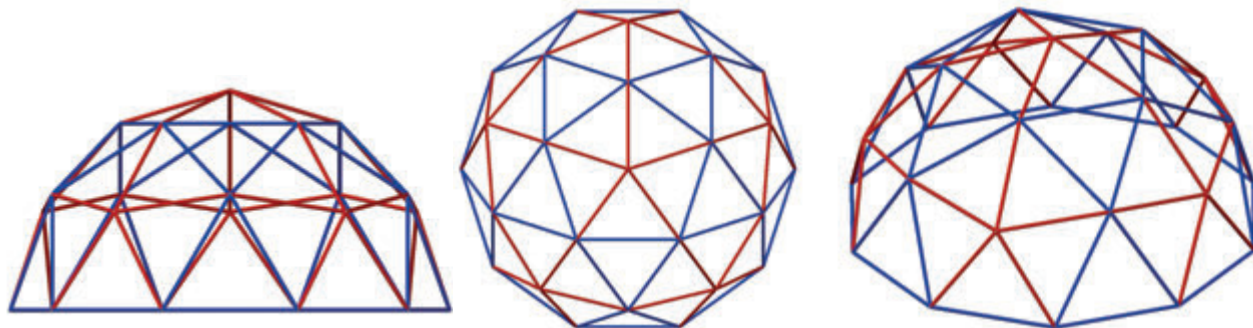
Слика 10: Раванска мрежа геодезијске структуре која има број учесталости 2.

Ротирајте структуре, а онда замислите њихове мреже. Посматрајте различита геометријска тела и њихова имена.

Пронађите модел под именом Икосаедарска геодезијска структура са бројем учесталости 2. Ради једноставности, прво ћемо њу направити, а затим можете покушати да направите сложеније структуре.

1.3 Направите геодезисјку куполу од новина

Као што можете уочити и израчунати на нашем дигиталном моделу добијеном у програму Поли, биће вам потребно 35 комада цеви дужине 65 цм (плавих на сликама) и 30 комада цеви 58 цм (црвених на сликама) како бисте направили геодезисјку куполу приказану на доњој слици (Слика 11).



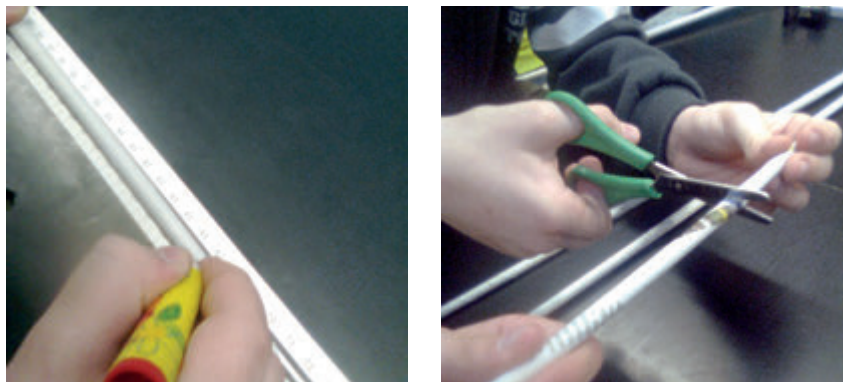
Слика 11: Геодезијска структура са бројем учесталости 2 коју треба направити на основу икосаедра, посматрана бочно (лево), одозго (у средини) и фронтално (десно).

Користећи штапиће и новине, направите папирне шипке за оквир куполе према редоследу на Сlici 12. Као што Слика 12 приказује, поставите новине на сто. Ставите један произвољан штапић, који служи као средство за мотање, управно у односу на дијагоналу правоугаоног листа новина у његовом углу. Чврсто замотајте лист новина око штапића, водећи рачуна да штапић остане управан у односу на дијагоналу. Када је цев направљена од новина готова, залепите угао новина на заврнутом крају самолепљивом траком, тако да се папир не одвија.



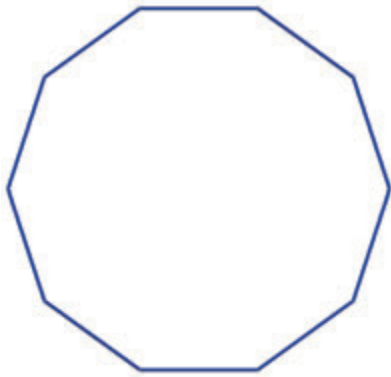
Слика 12: Прављење папирних цеви за оквир куполе користећи штапиће и новине.

Измерите и означите потребну дужину на завршеним новинским цевима, тако да потребна дужина цеви треба да остане са обе стране по 1 цм дужа и одсеките непотребне делове на крају папирних цеви (Слика 13). Потребна је спојница пошто ће се цеви током изградње спајати хефталицом у теменима, где се шипке које чине структуру оквира спајају, а на тај начин је лакше спојити штапиће хефталицом. За изградњу је потребно је 35 штапића дужине 65 цм (плаве боје на Сlici 11) и 30 штапића дужине 58 цм (црвене боје на Сlici 11).



Слика 13: Обележавање и сечење цеви од новина.

Проучите основу куполе. Можете закључити да је основа куполе правилни десетоугао. Поставите 10 плавих (дужих) штапића на тле као што се види на Слици 14.



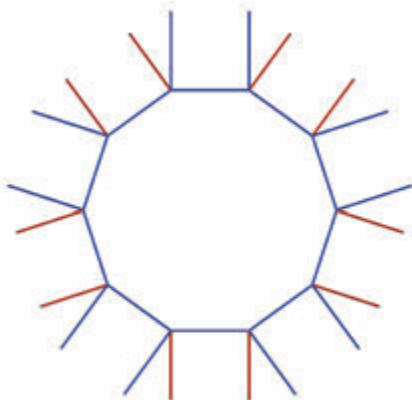
Слика 14: Основа геодезијске куполе

Израчунајте величину углова правилног десетоугла!

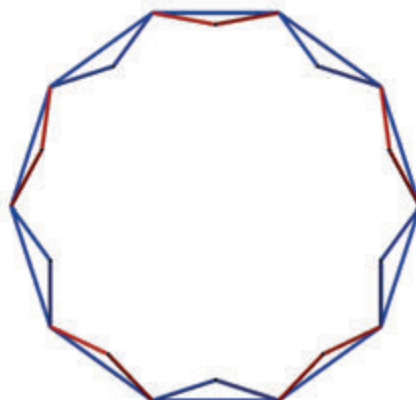
Треба направити 10 шаблона са углом од 144° и користећи их спојити штапиће, формирајући потребне углове, како би успели прецизно да спојите штапиће.

Након овичавања области штапићима, захефтајте штапиће хефталицом. На тај начин, десетоугао који чини основу куполе је готов (Слика 14).

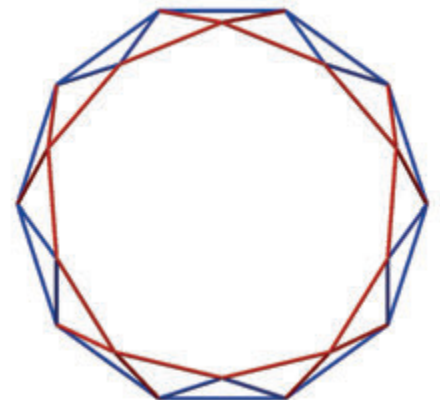
У наредним корацима пратите доње слике. Спојите штапиће хефталицом, или можете користити лепак за заптивање спојева. Двоструке слике узастопних фаза изградње куполе су следеће (Слике 15-21):



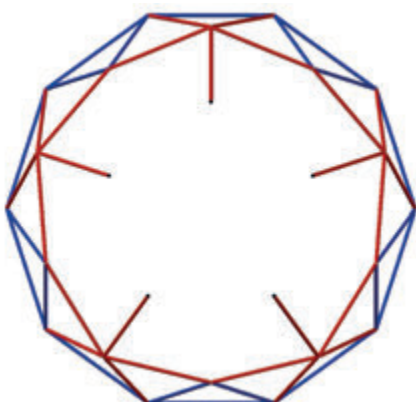
Слика 15



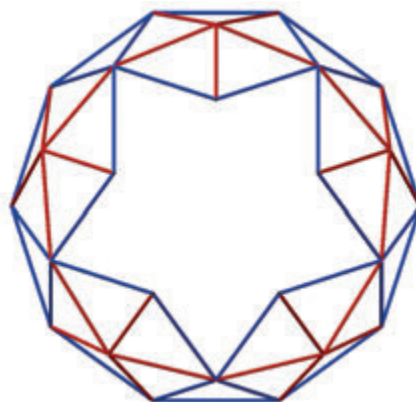
Слика 16



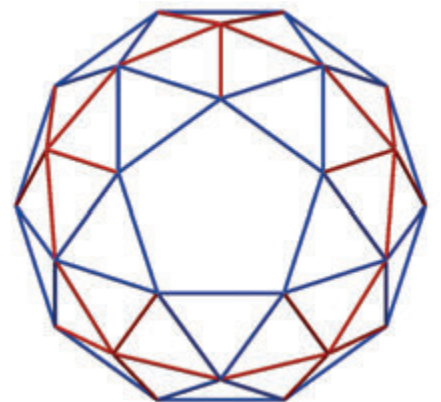
Слика 17



Слика 18

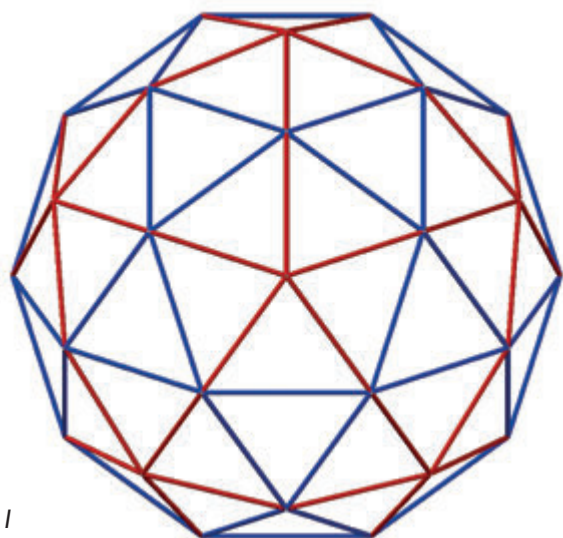


Слика 19



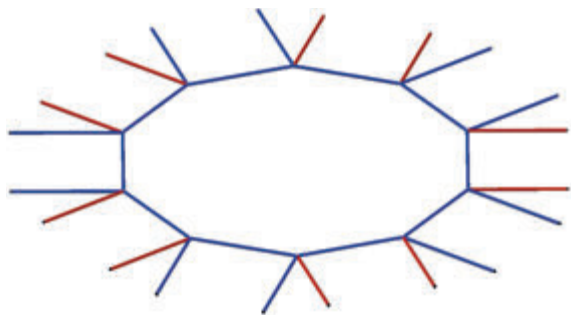
Слика 20

Figure 21

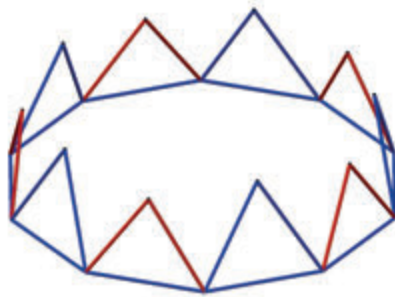


Слике 15-21: Дводимензионе слике фаза изградње куполе (компјутерску графику је урадио Др Ласло Ворош (László Vörös))

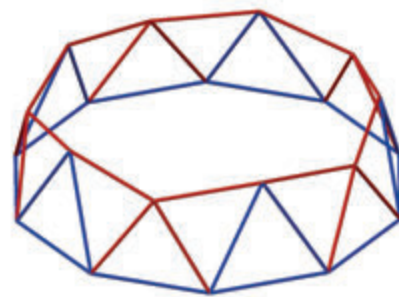
Тродимензионе слике фаза изградње куполе су следеће (Слике 22-28):



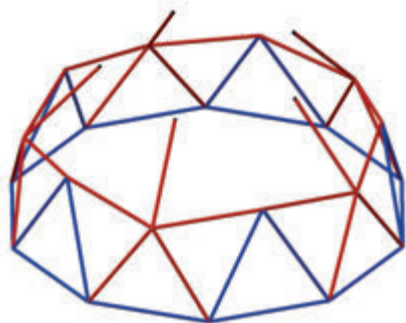
Слика 22



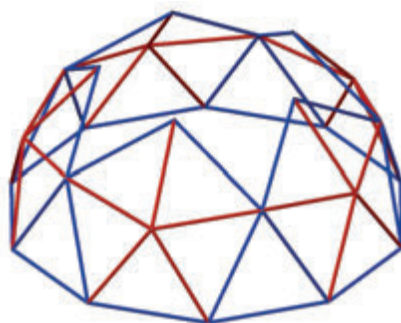
Слика 23



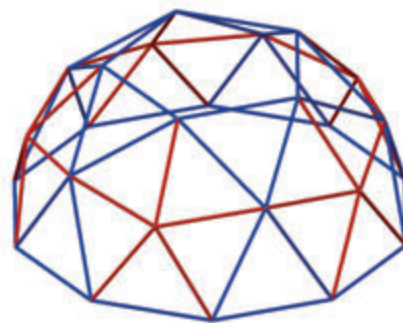
Слика 24



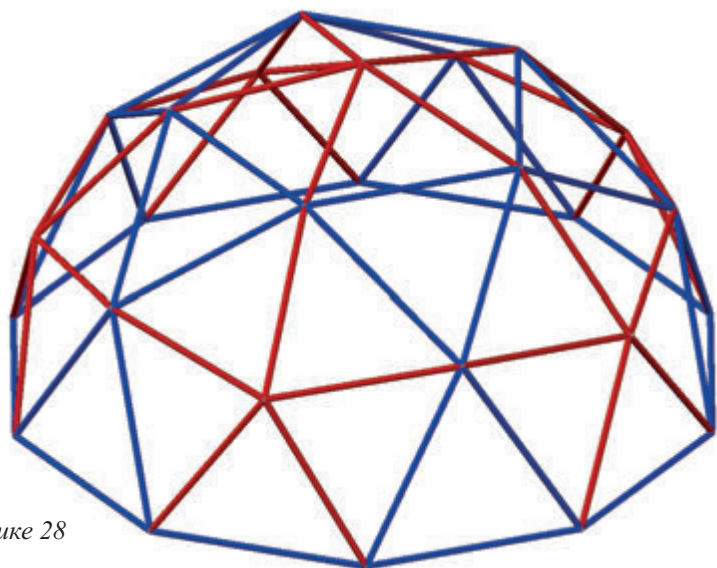
Слика 25



Слика 26



Слика 27



Слика 28

Слике 22-28: Тродимензионе слике фаза изградње куполе (компјутерску графику је урадио Др Ласло Ворош (László Vörös))



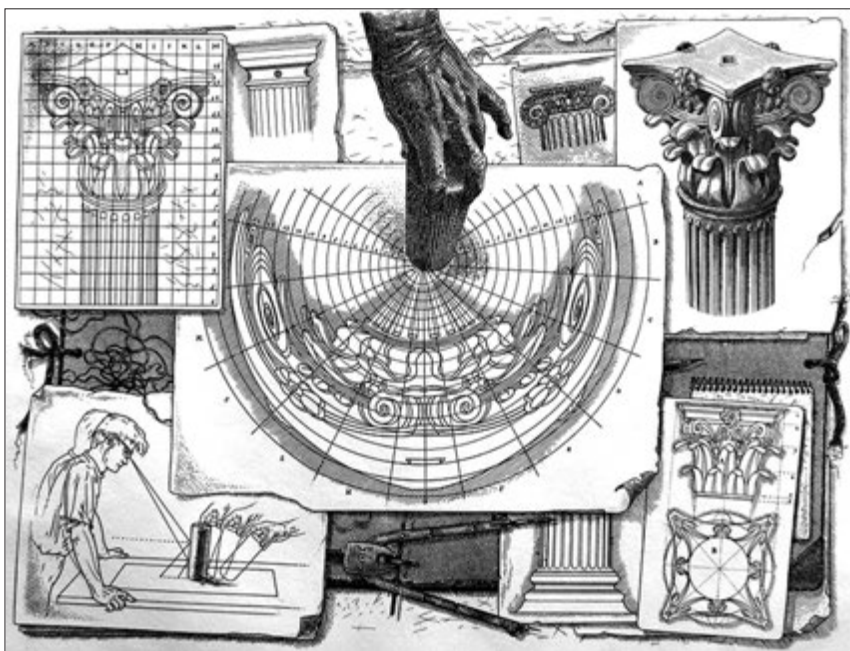
Слике 29-33: Фотографије процеса изградње у учионици

2 Креирајте анаморфозу

Стварање оптичких илузија и других визуелних ефеката кроз игру и креативне активности представља значајан потенцијал за буђење и повећање интересовања за математику и друге научне области. Извесни визуелни ефекти се базирају на појавама које се могу описати са математичке тачке гледишта и добијају се као резултат алгоритамских операција које могу бити формализоване. Неколико графика добијених применом математичких знања која представљају основу добијених визуелних ефеката налази се међу делима путујуће изложбе Радионице искустава. На пример, анаморфозе које је креирао Иштван Орош или Јан В. Маркус, које се могу наћи у нашој колекцији су применљиве у педагошком смислу и могу привући пажњу наставника који трагају за занимљивим визуелним садржајима.

Анаморфоза представља искривљену пројекцију или перспективу и захтева од посматрача да постави цилиндрично или конусно огледало на цртеж или слику, или заузме одређен повољан положај да би видео и реконструисао слику.

Током упознавања са анаморфозама можете извести занимљиве закључке из различитих области. Уочавање свих њих зависи од личних циљева и способности, а ми наводимо само неке идеје надајући се да ће вас заинтересовати и навести на даље истраживање. Неке од области науке које могу бити повезане са анаморфозама су: математика у којој можемо проучавати везу Декартовог координатног система и система са поларним координатама-обострано-једнозначну кореспонденцију (тачака и ћелија) различитих референтних система, мерење углова, приказивање и поделу концентричних кругова на подударне секторе, итд. У физици анаморфозе илуструју концепте који припадају геометријској оптици, као што је понашање светлосних извора, преламање светлости, рефлексија са различитих површина, итд. У биологији корисна запажања се могу извести, на пример, у темама које тумаче процесе виђења и анатомију ока. Следећа листа активности је само мали део потенцијалних примена анаморфоза у настави.



Слика 34: Креације Иштвана Ороша (István Orosz). Анаморфно око (лево) и конструкција анаморфозе (десно)

- Прва игра: прочитајте искривљени текст на логоу



Слика 35: Искривљени лого Радионице искуства

Запажања

- Што се тиче начина читања: читајте текст са лева на десно, а од вас се тражи да замислите слику слова како би могли да прочитате текст ;
- Искривљена пројекција је конструисана у облику готово правилног полукруга на папиру, итд.

- Друга игра: игра са огледалима

Запажања

- Користећи огледало лакше ће вам бити да прочитате текст;
- Облик огледала који користите је заиста битан;
- Огледало цилиндричног облика постављено на правом месту омогућава прецизно читање текста;
- Формулисање хипотезе: коришћењем цилиндричних огледала, сваки овакав скривени текст може бити одмах читљив.

- Трећа игра: направите цилиндрично огледало

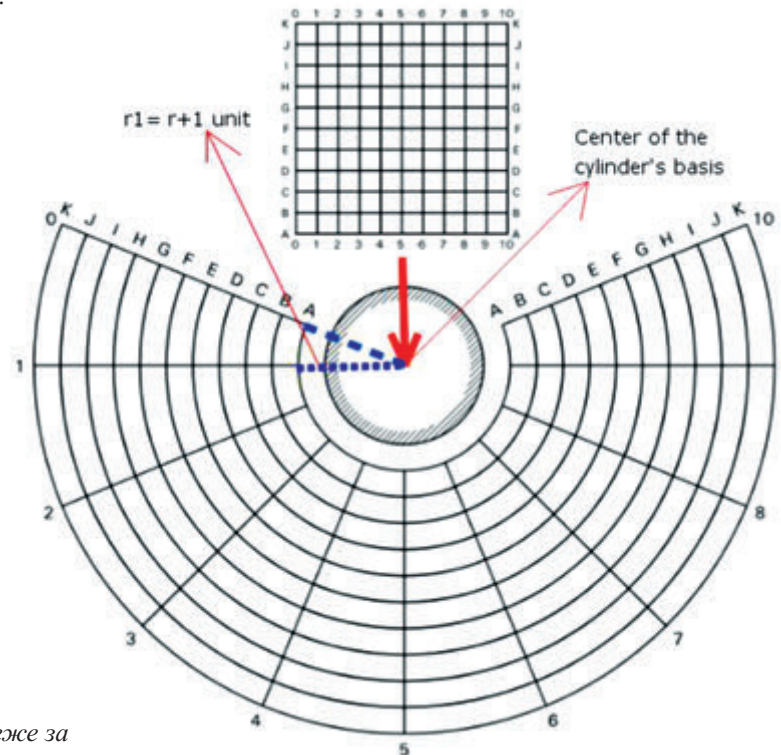
Прављење цилиндричног огледала је веома једноставно: направите цилиндрично огледало лепљењем фолије која се продаје у продавницама канцеларијског прибора на картонски цилиндар одговарајућег полупречника (на пример, користите картонски цилиндар за кухињске убрусе). Постављањем цилиндричног огледала на полукружни део папира на коме је анаморфоза нацртана, лого приказан на Слици 35 се може видети као правилан читљив текст.

Да бисте направили своје анаморфозе потребне за горе поменуте активности, користите програм за генерисање анаморфоза који се бесплатно може преузети са сајта <http://www.anamorphosis.com/software.html>.

На овај начин илустрације потребне са горе наведене активности могу бити конструисане на основу било које слике.

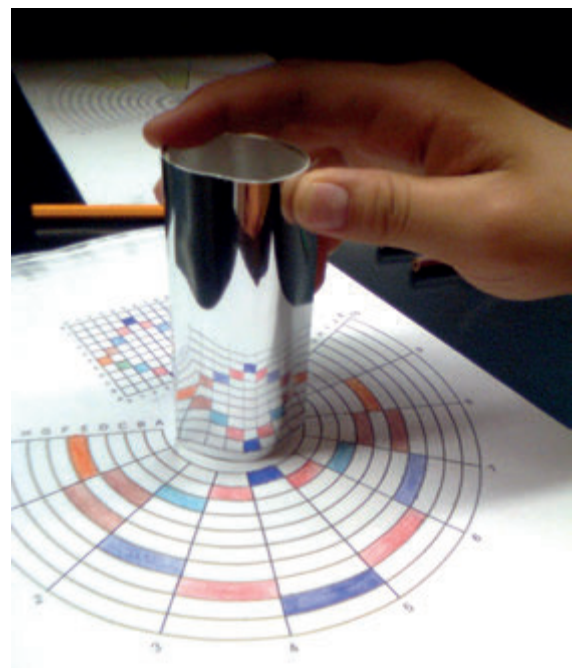
- Четврта игра: проучите технологију израде анаморфоза! Пронађите сличности између мрежа док стварате анаморфозу!

Сваки учесник игре добија лист папира на коме су претходно нацртане мреже за креирање анаморфоза према доњој слици и опису. Додатне линије нацртане црвеном и плавом бојом не налазе се на сликама, тако да деца сама могу да открију везе.



Слика 36: Структура мреже за конструкцију анаморфозе

Цртајући на прави начин додатне линије ученици могу лако схватити како да креирају искривљену мрежу из оригиналне мреже: цртањем низа кругова концентричних са кругом који чини основу цилиндричног огледала и делећи их на секторе ограничене крацима углова од $22,5^\circ$ са теменом које је у центру, формирају се искривљене ћелије. Црвена стрелица указује на центар основе цилиндра, плаве испрекидане линије су полупречници првог круга који ће бити основа цилиндричног огледала. Слово r означава полупречник основе цилиндра.



Слика 37: Постављање цилиндричног огледала

- Пета игра: користите ласер

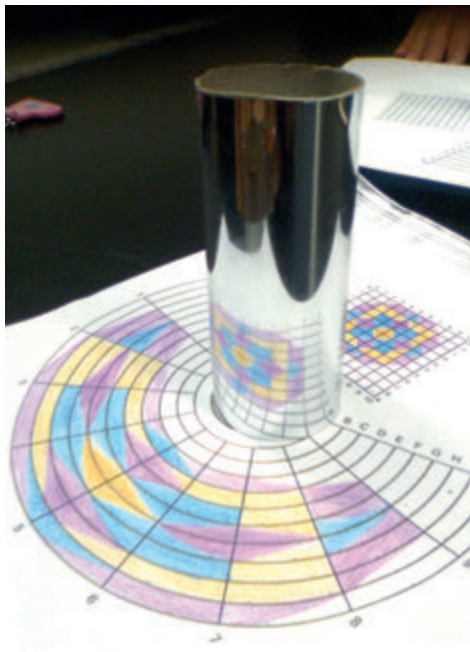


Учврстите извор ласерске светлости на постоље које се налази у комплекту делова који се користе на часовима физике. Упозорите учеснике на опасност од коришћења ласера и објасните начин његовог коришћења. Прво подесите извор светлости гледајући на папир одозго. Ученици могу посматрати где се налазе тачке које одговарају једна другој приликом рефлексије светлости: тачка светлости на цилиндру и њена слика на мрежи (кореспонденција ћелија). Поштујући неопходне безбедносним прописе и уз сталан надзор и помоћ наставника постепено препустите ову активност самим учесницима.

Слика 38: Коришћење ласера

- Шеста игра: креирајте анаморфозу

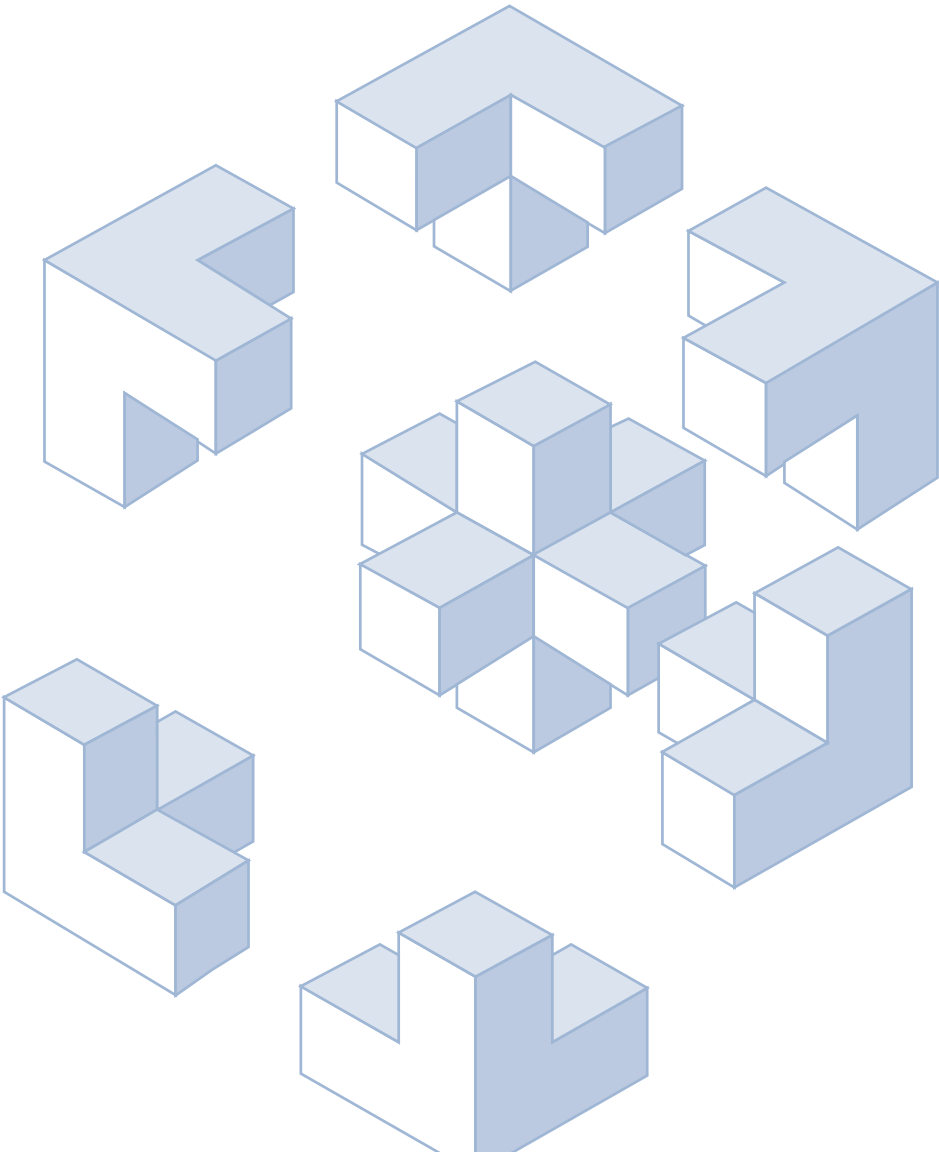
На правилној квадратној мрежи ученици могу да нацртају своје сопствене креације, а копирањем одговарајућих ћелија на искривљеној структури мреже може се добити искривљена слика. Ћелије означене словима и бројевима помажу у мапирању. Затим, постављањем цилиндричног огледала на означеном кругу добијена анаморфоза се може одмах видети на њему.



Слика 39: Креирајте анаморфозу!

- Седма игра: креирајте сопствену мрежу

Одаберите картонски цилиндар и налепите огледало-фолију на његову површину. Нацртајте структуру мреже, укључујући квадрате и означите ћелије бројевима и словима према опису у четвртој игри. Поставите цилиндрично огледало на папир и нацртајте круг око његове основе. Затим, према горе наведеном опису, нацртајте мрежу кружног облика. Када се цилиндрично огледало постави на њу, искривљена слика ће се видети као слика у цилиндричном огледалу без деформација, у унапред планираном облику.



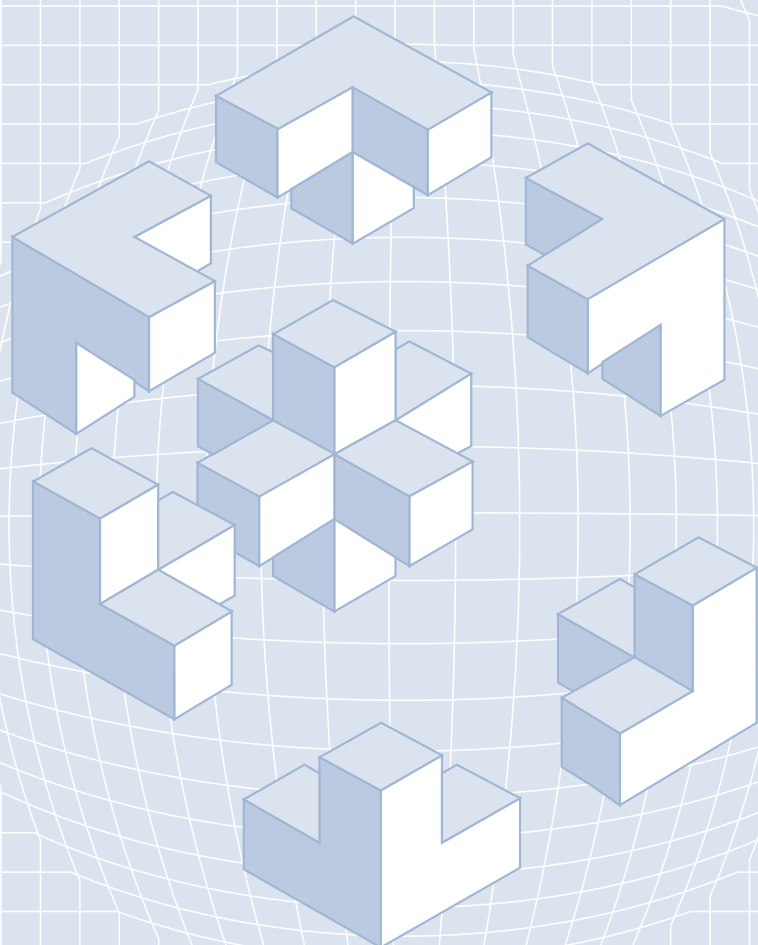


VISUALITY &
MATHEMATICS

EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

Дирк Хојлебрук

Радионице са 3Д фракталима



ВАРЉИВЕ СТРУКТУРЕ,
РАЗИГРАНЕ ПЕРСПЕКТИВЕ

Дирк Хојлебрук (Dirk Huylebrouck) је провео осам година на универзитетима у Конгу, све док дипломатски инцидент између Белгије и председника Конга, Мобутуа, није прекинуо његов боравак. Тада је прешао на Универзитет Авеиро у Португалу и Европско одељење Мериленд универзитета, све док већина његових америчких студената (војника) није отишла у Ирак. Вратио се у Африку, у Бурунди, али само на три године, због геноцида у суседној Руанди. Коначно је 1996. године почео да предаје на Архитектонском факултету КУЛеуен (Белгија). Он и даље много путује, пошто од 1997. уређује рубрику "Математички туриста" (The Mathematical Tourist) у часопису „Математички агент“ (The Mathematical Intelligencer). Међутим, можда ће ускоро поново морати да напусти земљу, пошто је постао (не)популаран због проналажења и објављивања грешака које се јављају на белгијској туристичкој атракцији, "Атомијум", у радовима Леонарда да Винчија, у тумачењу врсте "забрањеног воћа" на слици "Мистично јагње" браће Ван Ајк, и недавно, нумеричких грешака откривених на скулптурама Норберта Френсиса Атарда испирисаним Фибоначијевим низом.



Фрактали

Фрактали су постали веома популарни, пошто су то занимљиве фигуре које понављају исту слику након довољног увећавања или умањивања, чак и до бесконачности, тј. поседују особину самосличности. Стога фрактали понављају један исти облик, баш као што се у природи облак, лист папрати или карфиол састоје од мањих делова сличних оригиналу (целини). У популарној математици, фрактали су значајан предмет интересовања првенствено зато што се могу графички приказати атрактивним цртежима који подсећају на неке психоделичне МТВ-видео спотове. Међутим, идеја фрактала је стара неколико стотина година и присутна на скицама дрвећа Леонарда да Винчија или на подним мозаицима породице Космати (Cosmati), а захваљујући французу Беноа Манделброту (Benoît Mandelbrot) (који је емигрирао у САД) ова математичка тема је прерасла академске кругове и стекла пажњу коју заслужује.

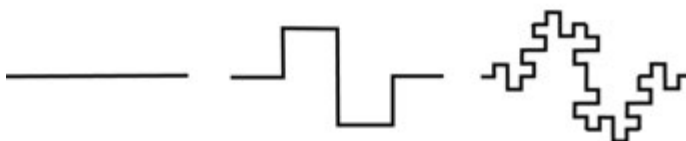
Мера "степенa сложености" ("разуђености") криве, површи или 3Д објекта назива се његовом фракталном димензијом. Ако је у некој итерацији полазни лик подељен на n нових елемената пропорционалних са полазним елементом, где је s коефицијент пропорционалности, онда се фрактална димензија D рачуна формулом

$$\text{број нових елемената} = (1/\text{коефицијент пропорционалности})^{\text{фрактална димензија}}, \text{ тј. } n = (1/s)^D.$$

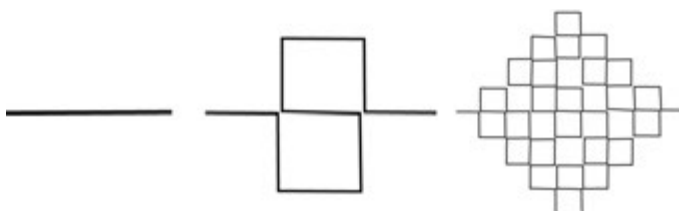
На пример, права линија има димензију 1 пошто је $a=3$, $s=1/3$, па је $D=1$, тј. $3 = 3^1$: ако је јединична дужина 1 подељена на $a=3$ подударна дела, коефицијент пропорционалности је $s=1/3$, па је $D=1$. Квадрат има фракталну димензију 2, пошто је $9 = 3^2$: ако је дат квадрат чија је страница јединичне дужине 1 и свака страница квадрата подељена на $a=3$ подударних делова, онда ће 9 нових квадрата испунити полазни јединични квадрат. Коначно, коцка има димензију 3, зато што је $27 = 3^3$, пошто 27 малих коцки испуњавају коцку чија је свака ивица дужине 1 подељена на три подударна дела. За фракталне криве приказане на наредним сликама, фракталне димензије су између 1 и 2.

Неки фрактални цртежи и њихове димензије:

Фрактална крива са димензијом $D=1.5$ зато што се сваком кораку (итерацији), користи $n=8$ нових делова, коефицијент пропорционалности је $s=1/4$, па је $8 = 4^{1.5}$, јер је $8 = (\sqrt{4})^3 = 4^{3/2}$.



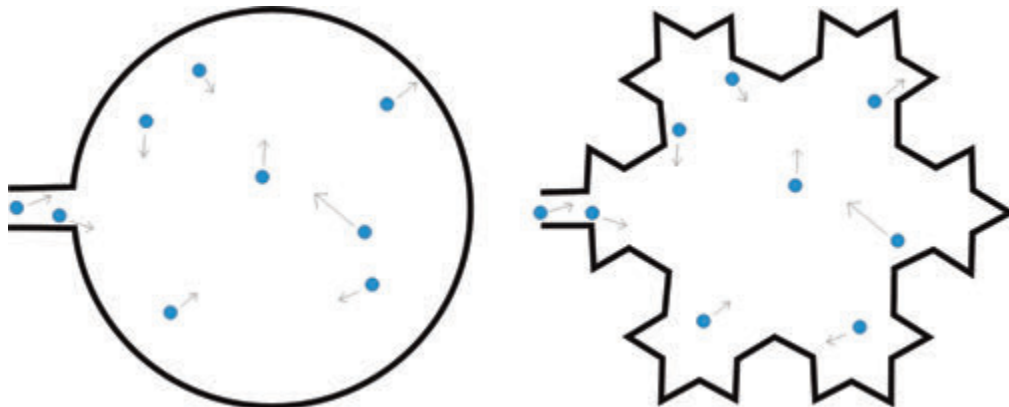
Фрактална крива са димензијом $D=2$, пошто се у сваком кораку користи $n=9$ нових делова, а коефицијент пропорционалности је $s=1/9$, па је $9 = 3^2$. Плетење тканине на овај начин омогућава да се направи савршено термички изолована одећа.



Димензија такозваног Коховог фрактала (Koch fractal) је приближно $D \approx 1.26$ јер је коефицијент пропорционалности $s=1/3$ и користи се $n=4$ четири пута више нових делова. Дигитрон нам помаже да ово потврдимо: $4 \approx 3^{1.26}$.

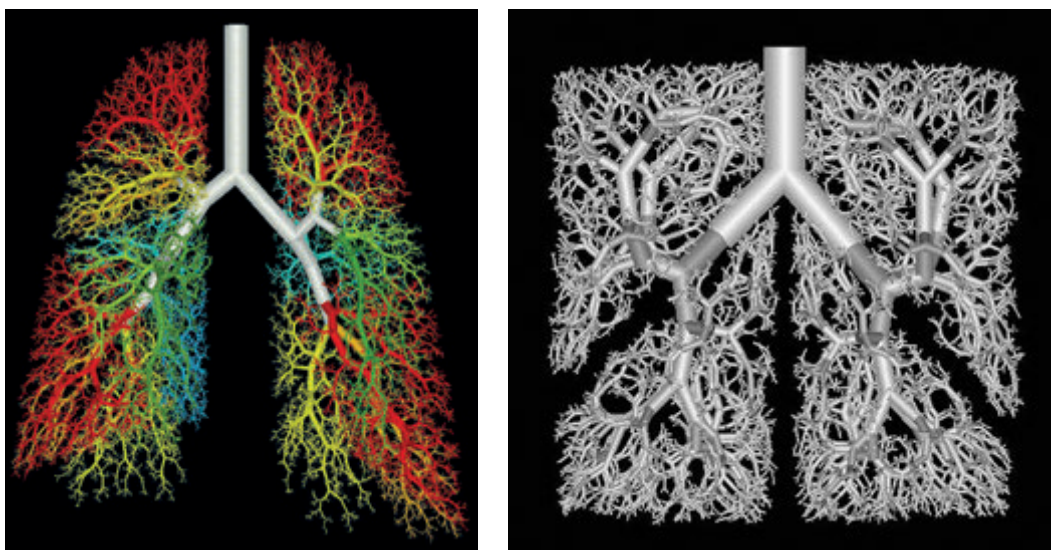


Математичка теорија фрактала користи такозване комплексне бројеве тзв. вишеструке фрактале (мултифрактале). Мултифрактали налазе своју примену у проучавању структуре људских плућа. Приближно, плућа заиста можемо сматрати фракталом. У свакој алвеоли молекули ваздуха се сударају са унутрашњом површином плућа, у такозваном Брауновом кретању (чији принцип је први формулисао Алберт Ајнштајн). То значи да се они сударају на потпуно насумичан (случајан, хаотичан) начин. Што је већа унутрашња површина плућа, тј. фрактална димензија алвеола, то је већа могућност да молекули ваздуха могу ући у крв кроз њихову површину.



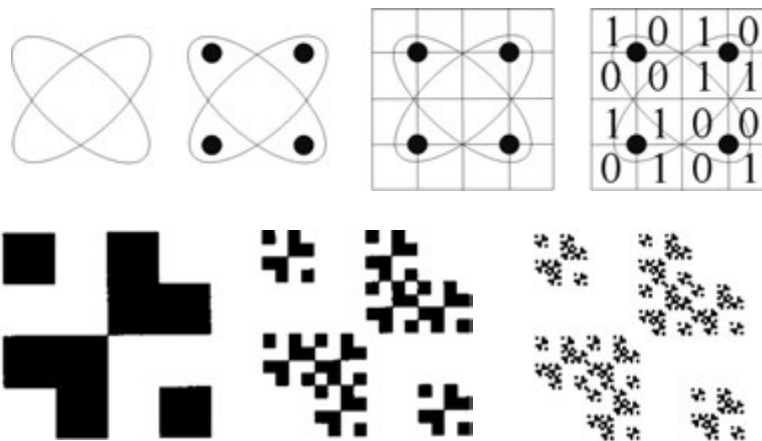
Апстрактне алвеоле, где се молекули ваздуха сударају у Брауновом кретању. Прва алвеола има облик круга (тј. сфере, у три димензије), а друга алвеола има облик Коховог фрактала који има већу фракталну димензију и омогућава бољу апсорпцију ваздуха.

Ако је унутрашња површина пресека плућа сувише неправилна, могло би се десити да молекули ретко додирују неке граничне делове подручја, јер они леже „иза угла“. Математичар Том Вулф (Tom Wolf) је показао да постоје површине са фракталном димензијом већом од 2 које су доступне Брауновом кретању (на срећу, јер то је разлог што можемо да дишемо). Џин Бургеин (Jean Bourgain) са Института за напредне студије Универзитета у Принстону доказује је да фрактална димензија једног комплетно приступачног региона не сме да буде преблизу броја 3.



Модели плућа на основу фрактала; реалистична слика (лево) и компјутерски генерисана виртуална апроксимативна слика (десно), под називом „квaдрaтурa плућa“ чији је аутор Руџи Такаки, Токио, Јапан (Руџи Такаки, Токуо, Јапан).

Још један популаран низ апликација се може наћи у етноматематици. Рон Еглаш (Ron Eglash) је написао књигу о „Афричким фракталима“, која нпр. говори о такозваном 'квинкунс фракталу' истакнутог афро-америчког научника Бенцамина Банекера (видети [4]). Он је напоменуо да није необично наићи на овај фрактални шаблон у Сенегалу, као украс на малим кожним торбама које се носе око врата. Етиопски крстови су други пример где се поново може препознати математичка фрактална структура. Свакако је исправно рећи да су многи афрички облици били инспирисани природом и пејзажима и да су стога изражавали њихову фракталну структуру.



Пример који је креирао Паулус Гердеи (Paulus Gerdes) и који показује како афричке огледалске криве цртане на песку могу довести до фрактала које је Гердеи изумео и назвао Лунда-фракталима.



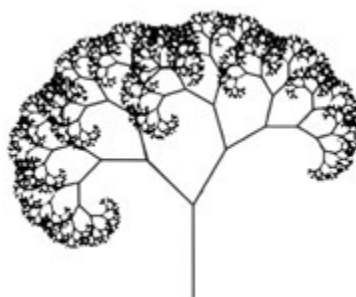
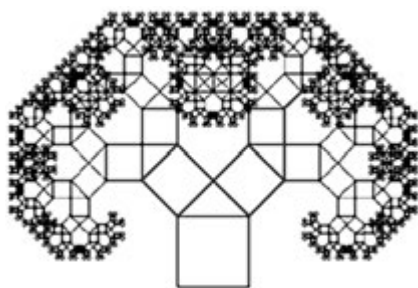
Међутим, пошто се заиста испоставило да су фрактали корисни у описивању природних феномена на основу једноставне математичке формулације- итеративних алгоритама, научници попут Дејвида Авнира (David Avnir) (Хебрејски универзитет у Јерусалиму, Израел) су показали да је фрактално својство природе још увек отворено за дискусију: врло често понављају се само два или три коефицијента пропорционалности, иако је могућност различитих бесконачних настављања важан део дефиниције фрактала (видети [1]). У Еглешовим 'Афричким фракталима', често постоје само два или највише три нивоа. Авнир је отишао тако далеко да је лично написао Манделброту да се противи његовим теоријама о фракталном тумачењу природе. Ипак, њихова расправа није довела до дефинитивних закључака, тако да ћемо ми завршити једном духовитом опаском Патрика Фаулер (Patrick Fowler) (Шефилдски универзитет, Велика Британија) током једне приватне преписке: „Зашто не постоји нека књига о, на пример, 'Католичким фракталима', јер у неким делима религиозне уметности, светац држи кип Богородице, која у рукама држи дете Исуса (видети слику)? Да ли је то такође фрактална уметност?“

Да ли је ова статуа доказ да су католички уметници знали за фрактале пре 600 година? Светац држи кип Богородице, која држи кип Исуса: да ли је то 'католички етноматематички фрактал'?

3Д Фрактали

Иако фрактали уживају велику пажњу у популарној науци, већина примера приказује 2Д слике или у најбољем случају 2Д примере приказане у 3Д. Слика такозваног фракталног дрвета је култна слика у фракталној уметности, али у већини случајева то је једно 'равно дрво' у две димензије. Један од најцитиранијих и такође најранијих примера правог 3Д фрактала је "Тетраедар Сиерпинског", назван по пољском математичару Вацлаву Сиерпинском (Waclaw Sierpinski). Његов 2Д оригинал је троугао Сиерпинског, који споља има облик једнакостраничног троугла, који је рекурзивно подељен на мање једнакостраничне троуглове. У 3Д, он одговара тетраедру, рекурзивно подељеном на 4 мања тетраедра. Наравно, даље варијације на ову тему су могуће, као

што је нпр. коришћење правилне четворостране пирамиде и њеног рекурзивног дељења на 5 мањих пирамида.

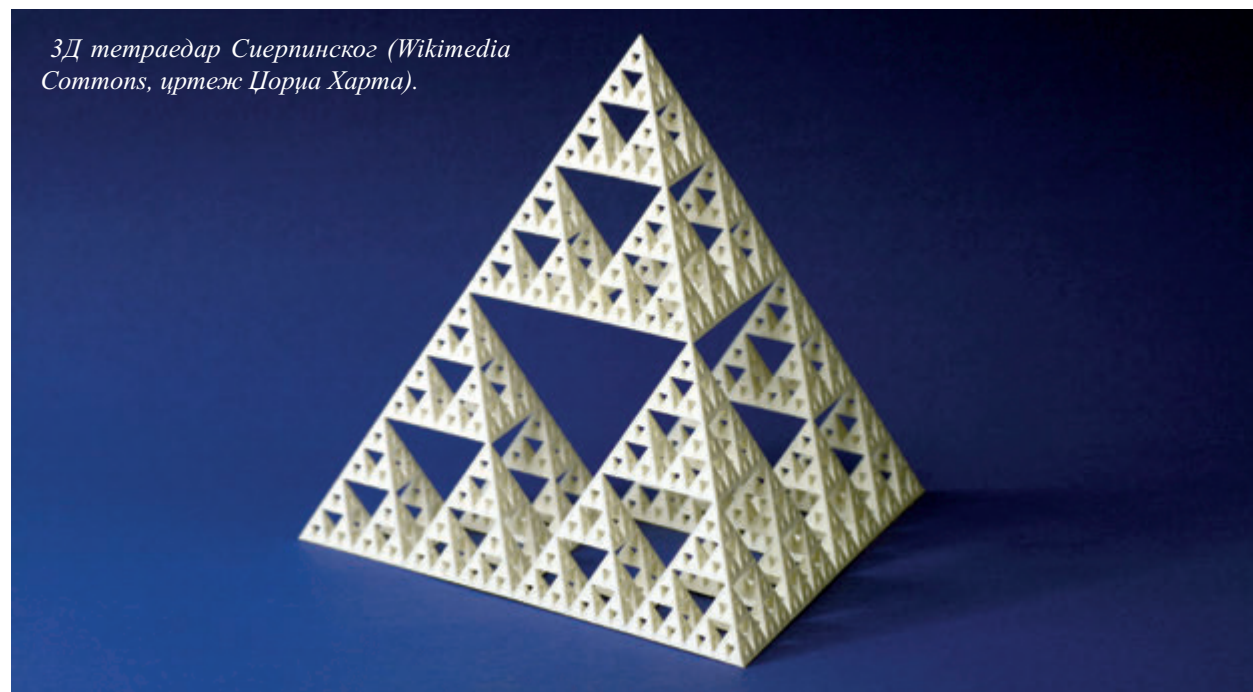


Култна слика: 2Д фрактално дрво (десно) настало на основу примене Питагорине теореме (Wikimedia Commons, цртеж 'Фракталног света').

Тродимензиона аналогичја троугла Сиерпинског

: нову врсту проблема који се могу појавити код 3Д

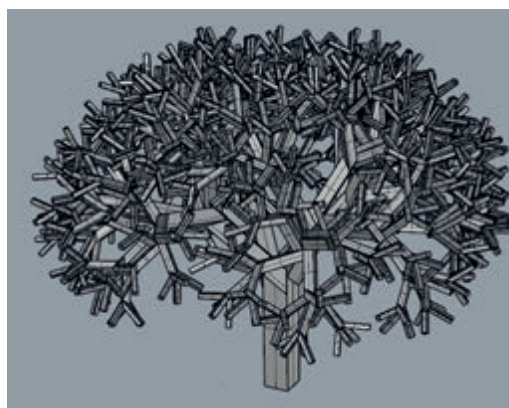
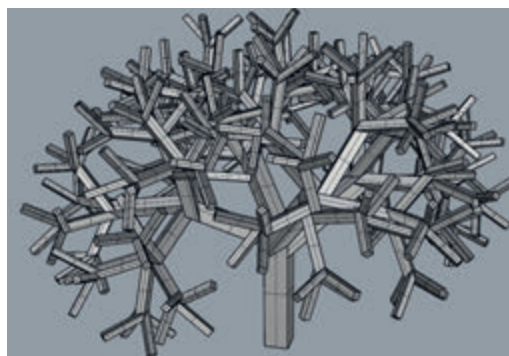
фрактала. Заиста, ако је почетни тетраедар са страницом дужине L и површине $L^2\sqrt{3}$ подељен на 4 тетраедра са страницом дужине $L/2$, укупна површина (укључујући унутрашње области) ће бити $4(L/2)^2\sqrt{3} = L^2\sqrt{3}$. Дакле, површина остаје константна после сваке итерације. Запремина се, са друге стране, смањује за једну половину са сваком итерацијом и на тај начин се приближава 0 се повећањем броја итерација. Његова фрактална димензија D , израчуната коришћењем формуле за фракталну димензију је 2, пошто је $4 = 2^2$ и она одговара фракталној димензији равног цртежа (квадрата).



Фрактално дрво такође пружа 3Д изазове: култни цртеж је слика у равни, а приликом прављења 3Д верзије, гране брзо прелазе једна у другу, то јест, секу суседне гране. То се десило Михил Даунслегеру (Michiel Duinslaeger), бившем студенту архитектуре на Архитектонском факултету КУЛеувен, Белгија (који је дипломирао у јулу 2014.). Он је похађао изборни предмет "Математичка уметност" и желео да конструише право 3Д фрактално дрво. Када је испробао неке произвољне дужине и углове, његови резултати су били незадовољавајући.



3Д фрактално дрво заиста постоји у природи (горња слика), али када се рачунарски моделира, 3Д цртеж убрзо постаје претрпан испреплетаним гранама (цртеж Михила Даинслегера).



Срећом, Михил Даунслегер је похађао предмет "Математичка уметност" заједно са групом студената математике из Србије, који су били у посети у оквиру Темпус пројекта. Један од тих студената, Данка Лучић, са Универзитета у Новом Саду, Србија, је саветовала Даунслегеру да користи смањење дужине за $\frac{1}{2}$ и углове од 45° између грана. Она је засновала свој предлог на постојећој литератури (видети [2], [5], [6] и [7]). Даунслегеров дизајн 3Д фракталног дрвета са 682 дела, који се понављањем лако могу заједно укомпоновати, биће тема прве 3Д фракталне активности. Друга активност се заснива на идеји израде полиедра помоћу балона. Овај начин моделирања полиедара је настао у хемији, али је у последње време постао популаран и у математици. (видети [3]).

Активност 1: 3Д Фрактално дрво

Водич за наставнике

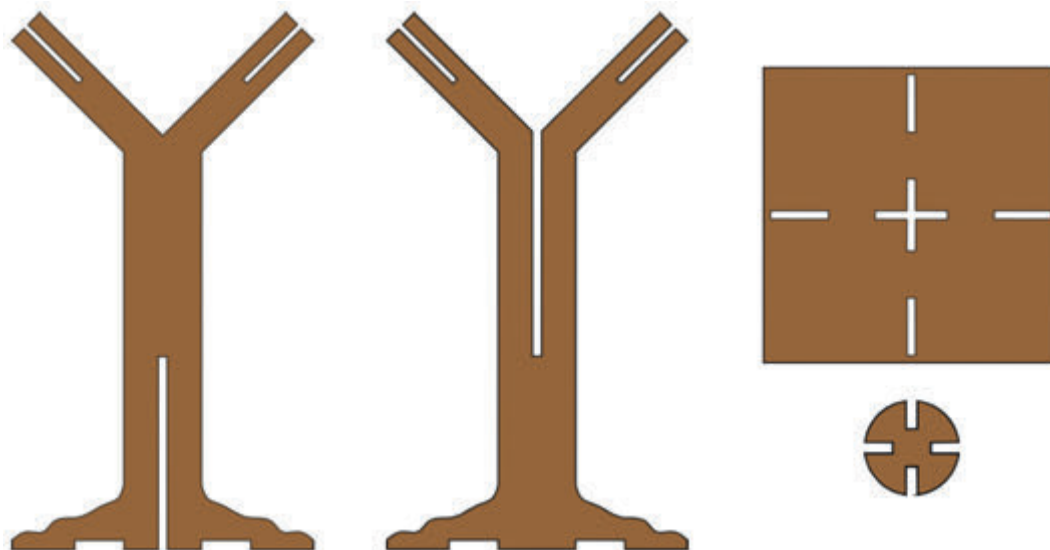
Материјали: Лагано дрво (триплекс или балсино дрво), картон, чврст папир.
Боја.

Циљ: Упознати студенте са особинама 3Д фрактала и констатовати колико споро или брзо свака генерација расте.

Речник: Фрактали, 3Д простор.

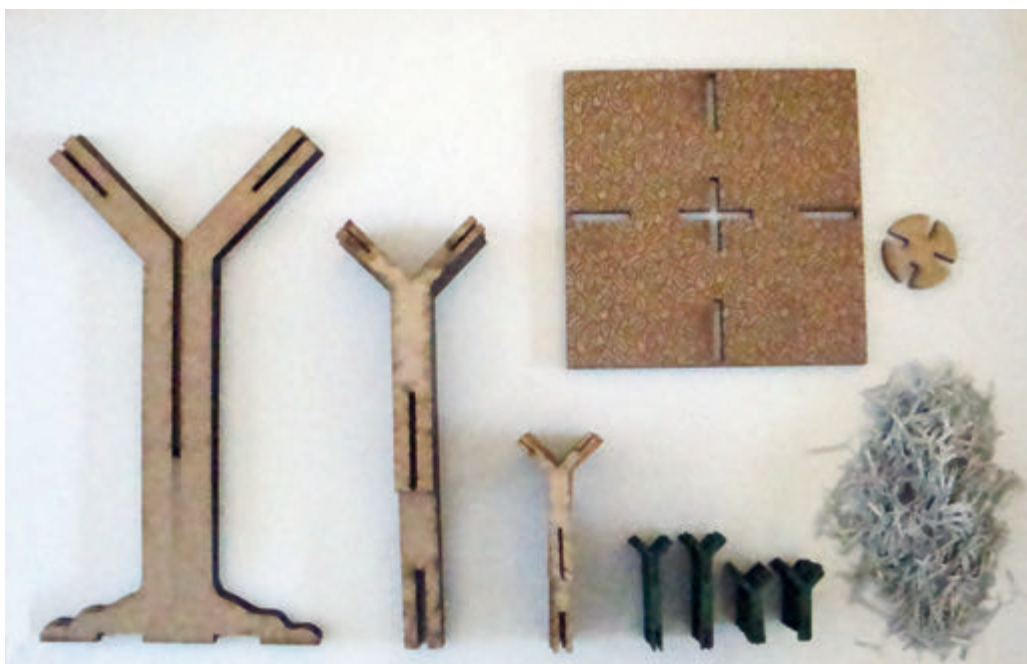
Редослед активности:

1. Копирање слике 1 на дрвету, картону и папиру. Користите дрво за прву генерацију, онда картон и на крају папир. Напомените да је ширина вертикалних отвора једнака дебљини употребљеног материјала за фракталну генерацију тих комада, али да је ширина косих отвора једнака дебљини материјала за наредну фракталну генерацију.



У датом примеру, два дрвена комада чине стабло дрвета, 8 наредних комада су гране, а на крају постоје 32 гранчице; 128 зелених листова и 512 цветова беле боје који комплетирају дрво. То је укупно 682 комада, али смо додали 2 комада за додатну потпору: велики квадрат и кружни облик који треба да чврсто придржавају стабло. Овде су дужине грана у облику слова Y 1,5 цм, следећа дужина је 9,25 цм, онда 4,625 цм и тако даље.

2. Обојите сваку фракталну генерацију по жељи (пошто је дрво небојено, користимо зелену и белу боју).
3. Нека ученици саставе дрво. Најважније од свега: будите стрпљиви!
4. Колика је фрактална димензија D дрвета?



С лева на десно: 2 комада за стабло дрвета, 8 за наредне гране, као и 32 гранчице; 128 зелених листова и 512 белих цветова комплетирају дрво.



Резултат: дрво са 4 генерације.



Грана са 5 генерација (учесницима активности је недостајало стрпљења да се изгради комплетно дрво са 5 генерација).

Активност 2: 3Д тетраедар Сьерпинског направљен од балона

Водич за наставнике

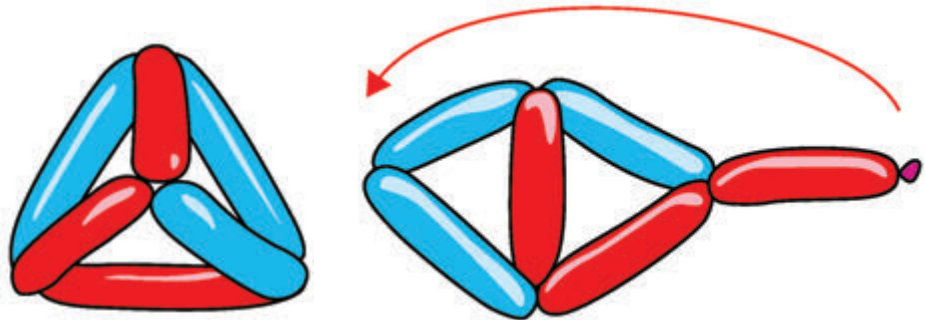
Материјал: Балони и пумпе. Ови балони су јефтини, а мале пумпе се продају заједно са њима. Можда ће вам требати гумице за везивање балона.

Циљ: Упознати студенте са особинама 3Д фрактала и констатовати колико споро или брзо свака генерација расте.

Речник: Фрактали, 3Д простор.

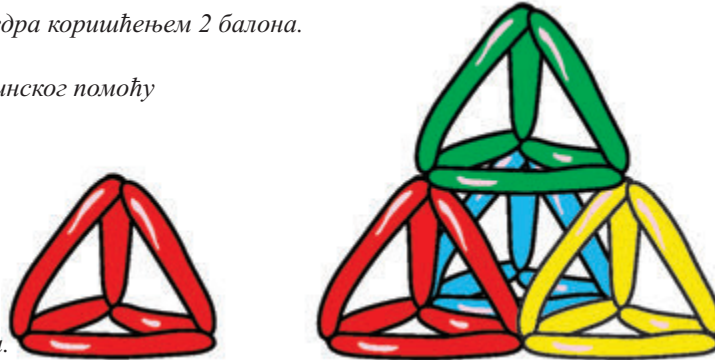
Редослед активности:

1. Надувајте два балона и саставите их као што је приказано у наставку. Покушајте такође да све ивице буду истих дужина, јер ће се испоставити на крају да је то врло важно, пошто од балона треба да направимо правилне тетраедре.



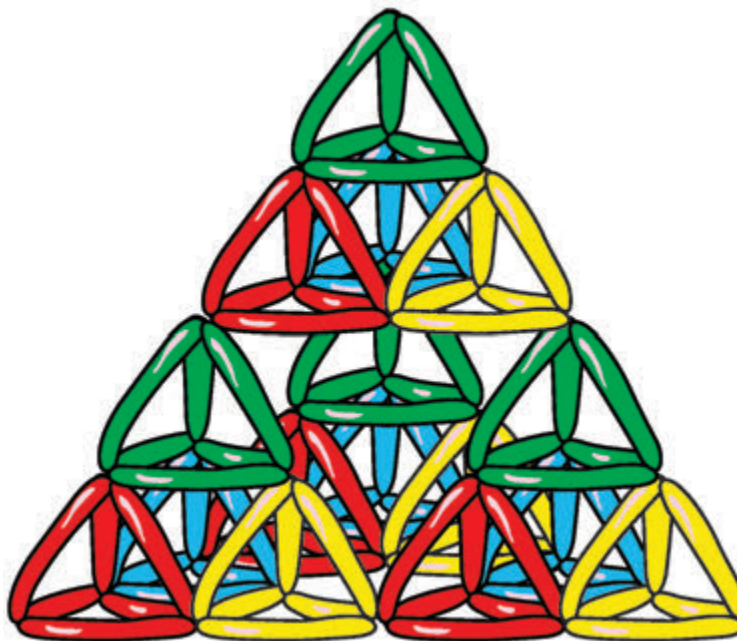
Конструкција правилног тетраедра коришћењем 2 балона.

2. Направите тетраедар Сьерпинског помоћу 4 тетраедра од балона.



Конструкција Сьерпинског заптивача коришћењем 8 балона.

3. Направите један већи тетраедар Сьерпинског помоћу 4 тетраедра од балона и тако искористите 32 балона.



Конструкција тетраедра Сьерпинског коришћењем 8 балона.

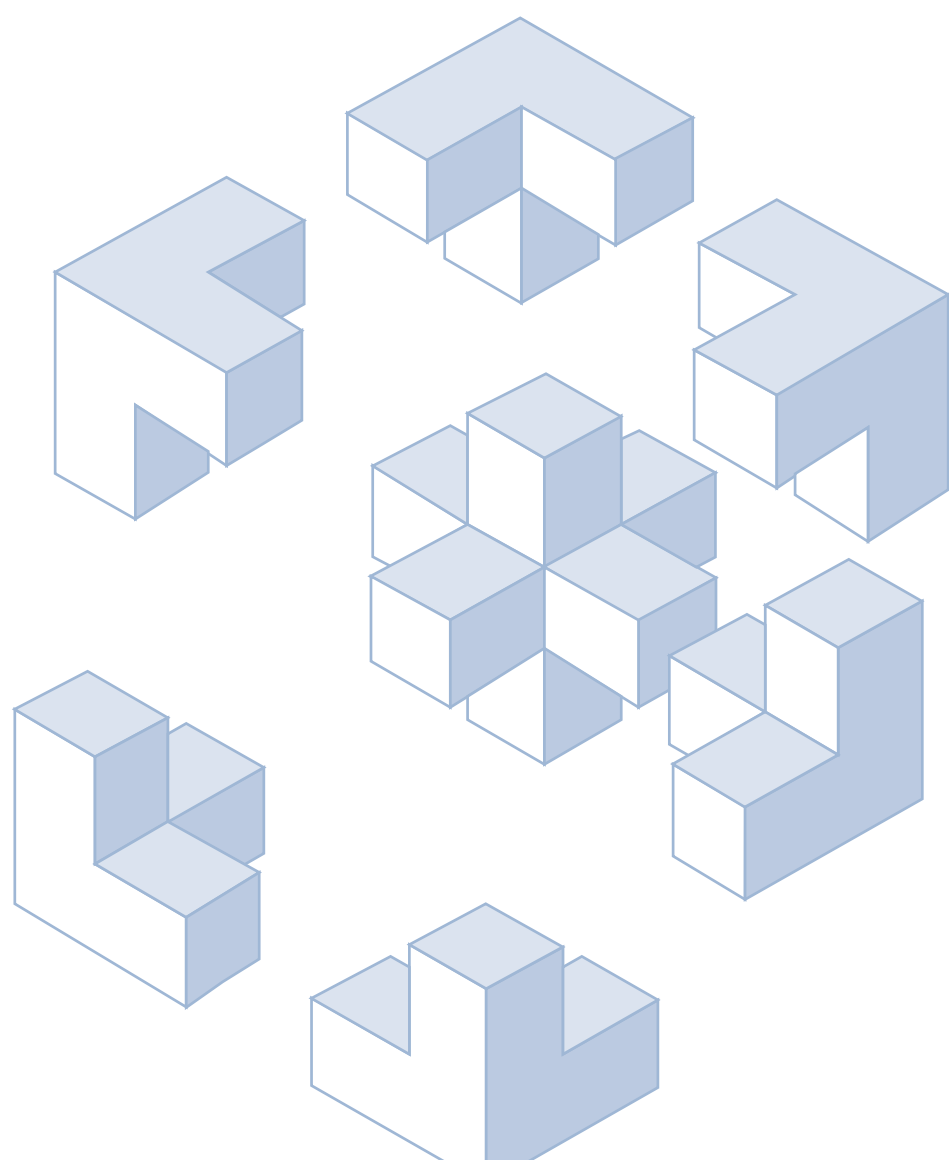
Амбициозни математички уметници или уметнички математичари могу покушати да оборе постојећи Гинисов рекорд за највећи тетраедар Сьерпинског конструисан од балона. Он је конструисан 16. марта 2014., користећи 2048 балона, у 1024 пирамиде, висине нешто веће од 7м, а за његово састављање је требало 6 сати.



Јована Ковач, студент Метрополитан универзитета у Београду,
у тетраедру Сьерпинског направљеном од балона, који је
направила заједно са својом колегиницом, студентом фотографије
Јованом Петровић.

Референце

- [1] D. Avnir, O. Biham, D. Lidar and O. Malcai, “Is the Geometry of Nature Fractal?”, Science, 279 (5347), pp. 39-40 (1998).
- [2] P.M. Bliss and D.A. Brown, “Geometric properties of three-dimensional fractal trees”, Chaos, Solitons and Fractals, 42, Elsevier, pp. 119–124 (2009).
- [3] E. D. Demaine, M. L. Demaine and V. Hart, “Balloon Polyhedra”, in Shaping Space: A Polyhedral Approach, edited by Marjorie Senechal, Second Edition, pp. 33-40 (2013).
- [4] R. Eglash, “African Fractals. Modern Computing and Indigenous Design”, Rutgers University Press, New Brunswick NJ (1999) .
- [5] R.M. Frongillo, E. Lock, and D.A. Brown, “Symmetric fractal trees in three dimensions”, Chaos, Solitons and Fractals, Elsevier, 32, pp. 284–95 (2007).
- [6] B. E. Pons, “Generalized self-contacting symmetric fractal trees”, Symmetry: Culture and Science, Vol. 21, Nos. 1-4, pp. 333-351 (2013).
- [7] T. Verhoeff and K. Verhoeff, “Mitered Fractal Trees: Constructions and Properties”, Proceedings of the conference “Bridges: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture”, pp. 25-32 (2011).





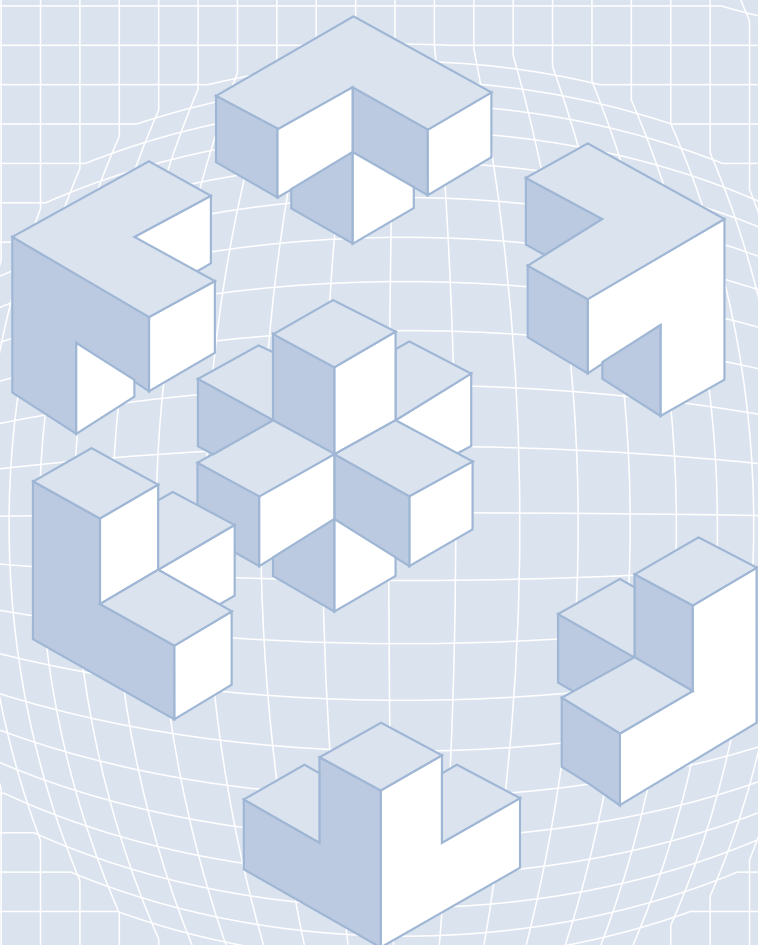
VISUALITY &
MATHEMATICS

EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

Џорџ Харт

„Уклизавач“,
геометријска папирна
конструкција

ПАПИРНЕ СКУЛПТУРЕ

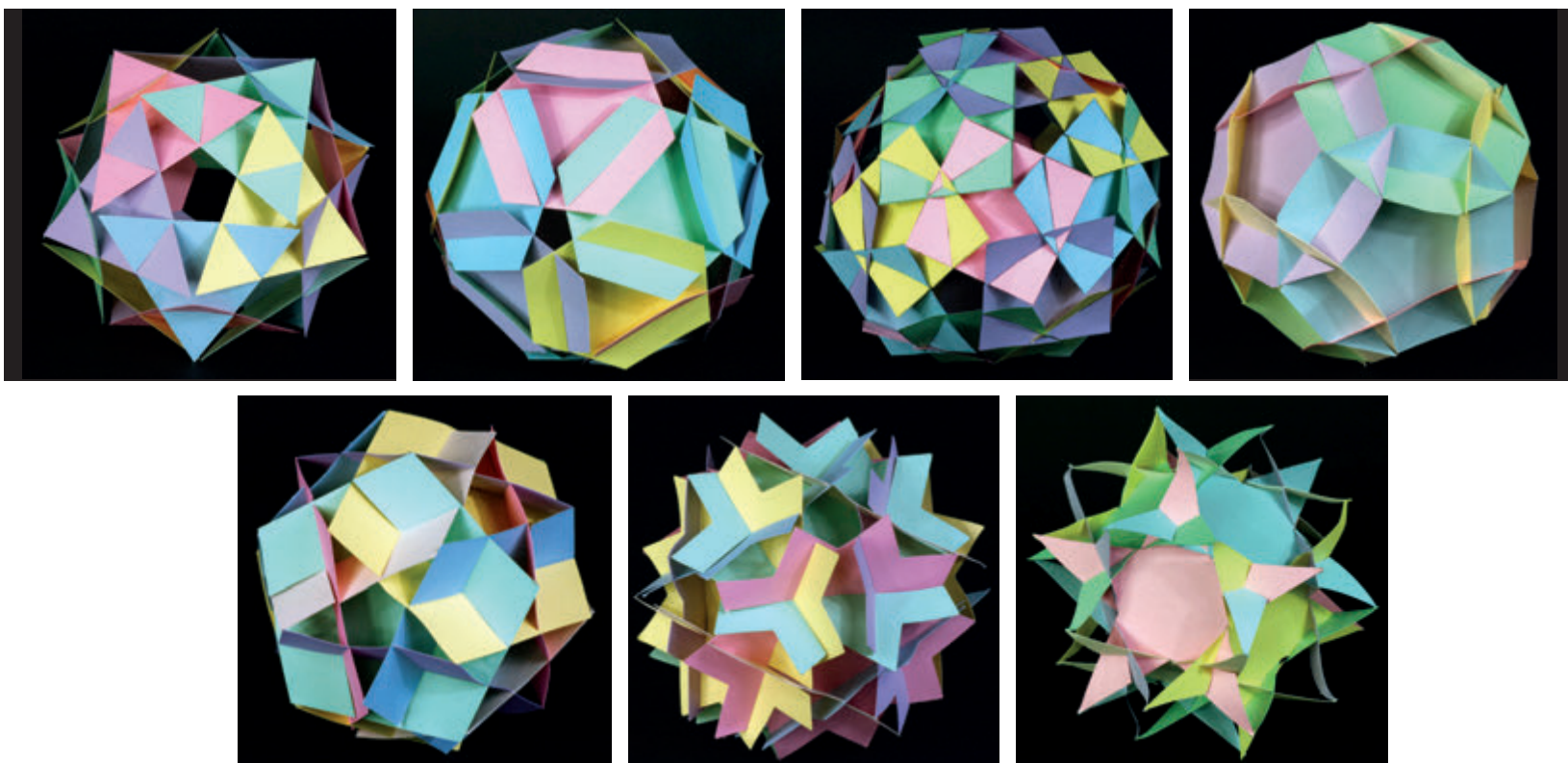


Џорџ Харт (Georg Hart) је вајар и професор на Стони Брук универзитету (Stony Brook University). Дипломирао је математику и докторирао на смеру електротехнике и информатике на МИТ универзитету (Massachusetts Institute of Technology). Харт је коорганизатор годишње конференције о математици и уметности „Мостови“ (Bridges Conference) и уредник је за вајарство у Журналу математике и уметности (Journal of Mathematics and the Arts). Његова уметничка дела су излагана широм света. Харт је суоснивач Музеја математике у Њујорку за који је осмислио прву изложбу. Он такође снима видео записе који приказују забавне и креативне стране математике. Примере његовог рада можете погледати на georgehart.com.



Увод. Ова активност се састоји од седам атрактивних конструкција које су забавне и које су релативно јефтине за прављење, зато што се ради о једноставном сечењу комада папира и увлачењу једних у друге. Тиме се развијају бројне математичке вештине у вези са геометријском структуром, шаблоном бојења и конкретном и менталном визуализацијом. Сматрам да су ово добре наставне активности за ученике виших разреда основне школе, средње школе и студенте. Поред тога, као тимски пројекти, ове активности добро функционишу ако се остварују у групама од два или три ученика. То подстиче сарадњу и математичку комуникацију.

Сваки „уклизавач“ је направљен од истоветних примерака само једне врсте правилних многоуглова (нпр. само квадрата или троуглова) са прорезима исеченим на одговарајућим местима. Ја их правим од обојеног картона, једноставним фотокопирањем шаблона. У већини случајева, лепак или самолепљива трака нису потребни ако користите крут папир, али ћете можда желети да користите мало лепка на угловима или мало самолепљиве траке на унутрашњој страни за спајање делова. Кључна ствар за стварање прецизног геометријског тела је чврсто спајање углова.



„Уклизавачи“, папирне конструкције урађене на основу, троуглова, шестоуглова, квадрата, десетоуглова, петоуглова, декаграма (десетоугаоног звездастог многоугла) и пентаграма

Упутство за прављење различитих модела. Изнад је илустровано седам модела поређаних приближно по тежини конструкције, од најлакших до најтежих. Предлажем да се почне са троугловима или шестоугловима који су једносавни за прављење само на основу илустрације. Модел са квадратима је захтевнији, зато што постоје места на којима се три листа сустичу. Упутства за ово су детаљно дата у наставку. Преостали модели, са десетоугловима, петоугловима, декаграмима и пентаграмима су све тежи. Једна од стратегија је да сви у разреду направе модел са троугловима и да онда различити тимови раде на различитим преосталим моделима. Оне теже доделите тимовима који желе већи изазов. Комбиновање резултата може дати веома атрактивне приказе. Један „мобилни“ модел који сам направио од свих седам модела је први пут изложен 1997. на конференцији „Математика и уметност“ (Math and Art) на Универзитету у Албенију, Њујорк, а затим у Годро Музеју математике (Goudreau Museum of Mathematics), у Новом Хајд парку, Њујорк.

Склапање „уклизавача“ од 30 квадрата

Копирање и сечење. За један модел користите пет листова картонског папира у пет различитих боја. (Обичан папир је претанак. Картонски папир је чвршћи и тежи од стандардног папира, али довољно танак да прође кроз ваљке фотокопир апарата или ласерског штампача. Већина копириница има на располагању избор боја у којима могу да ураде примерке за вас, или их можете купити у рисевима и ставити у свој фото копир апарат.) Ископирајте шаблон квадрата (испод) на пет листова папира. Ако желите, можете га мало увећати тако да добијете шест квадрата од 8,9 сантиметара који тачно стају на један лист папира; једино је суштински значајно да свих тридесет квадрата буду исте величине. Ако се користи само папир у једној боји, конструкција ће и даље бити геометријска, али ће изгубити много од лепоте.

Користећи маказе, сеците по линијама како би добили тридесет квадрата. Појединачно исеците четири прореza на сваком, тј. немојте наслагати квадрате и покушавати да направите неколико прореza једним резом јер ће то бити исувише непрецизно. Уредност је битна! Не морате да исечете све делове пре почетка склапања. Можете започети конструкцију када сте исекли и изрезали најмање један квадрат сваке боје.

У ономе што следи, имајте на уму следеће:

- (1) квадрати су равни; њих ћете привремено савити током склапања, али они треба да остану равни;
- (2) када два квадрата потпуно склизну један у други, две ивице једног квадрата секу две ивице другог (по једно укрштање се појављује на сваком крају прореza); и
- (3) сваки квадрат ће се спојити са по четири квадрата у четири различите боје, нпр. плави квадрат никада не додирује други плави квадрат.

Циклус од пет квадрата. Приметите да постоје два дугачка прореza и два кратка прореza на сваком квадрату. Увек ћете међусобно уклизавати један дугачак и један кратак прорез. Почните спајањем два квадрата различитих боја. Затим приметите на првој фотографији изнад да је централни петоструки отвор окружен са пет квадрата и видећете како су два од тих пет распоређени као два квадрата које сте управо склопили. Наставите шаблон и додајте трећи квадрат, четврти, и пети. Спојите пети квадрат са првим да завршите круг око петоструког отвора. Обезбедите да се увек сви углови квадрата налазе ван конструкције. Чест проблем је да се прореzi не уклапају потпуно један у други; ово можете уочити ако приметите да се ивице не секу.

Тросмерни углови Под "тросмерним углом" (или "триедарским углом") подразумевамо теме полиедра и припадне три ивице, тј. одговарајући триедар какав се јавља нпр., у теменима коцке. У овој фази, спојеви могу слободно да се ротирају, тако да склапање буде веома флексибилно, а неки спојеви могу спонтано да се раздвоје. Ако се то деси, само поправите спојеве да задржите петоугаони отвор. Оно што спаја делове заједно су "тросмерни углови" који се додају касније. Да бисте замислили где се они налазе, имајте на уму да ће од сваке четири ивице квадрата две (супротне) ивице дотаћи петоугаоне отворе, а преостале две (супротне) ивице ће додирнути тросмерне углове. Посматрајте ово она слици изнад.

Да бисте направили тросмерни угао између квадрата А и Б, изаберите нови квадрат В и спојите га и са А и са Б. Први проблем је да се утврди које боје треба да буде В. Трик је у томе да директно посматрате петоугао где се додирују А и Б и видите које је боје квадрат који се ту налази; изаберите квадрат В у тој истој боји. Други проблем је да се направи тросмерни угао симетричан са прецизним малим троуглом у његовом центру. Трик у овоме је да се прво уклопи В у А, а Б неком врстом ротације у В, а затим привремено савије и исправе мале тачке А, Б, и В колико је потребно да би се квадрати међусобно кретали и чинили неку врсту спирале. Ово је лакше урадити него објаснити. Обично неки ученици ово сами открију и онда показују осталим учесницима.

Довршавање структуре. Када усавршите овај трик онда је једноставно направити други тросмерни угао, па још један, итд., тако да свих пет почетних спојева буду учвршћени. У сваком случају, боја новог квадрата који се додаје мора бити одређена посматрањем петоугаоног отвора, да би одговарала боји супротног квадрата. Када се свих пет првобитних спојева учврсте на овај начин, употребићете укупно десет квадрата, чиме сте урадили трећину посла. Довршавање структуре је само ствар опажања да постоји неколико непотпуних петоугаоних отвора. Изаберите било који од њих за попуњавање и чврсто уклапање његових спојева, итд., док свих тридесет квадрата не буду искоришћени. Успут, двапут проверите да ли је сваки отвор окружен са пет различитих боја и да ли се сваки квадрат уклапа са још четири квадрата различитих боја. Ако су правилно направљени, шест квадрата било које боје биће поређани као једна расклопљена коцка.

Склапање шест преосталих „уклизавача“

Сличне технике се користе и за склапање шест преосталих „уклизавача“. Сваки може да се замисли као сет укрштених многоуглова, са прорезима који се користе да би омогућили да равни папира пролазе једна кроз другу. Деликатан проблем је избор боје сваког дела тако да цео распоред буде симетричан. Други проблем је техника прављења захтевнијих тросмерних углова са већим деловима који треба да се савијају једни око других. Илустрације изнад представљају упутства. У сваком случају, формирају се занимљиви шаблони ивица, често петокраке звезде.

Модел са троугловима као и модел са шестоугловима имају по двадесет компонената - четири дела у свакој од пет боја. Они немају тросмерне углове, тако да их је из тог разлога лакше склопити, али су зато и склони да се расклопе сами од себе ако се користи одређена врста папира. Ако је потребно, може се користити мало самолепљиве траке на унутрашњој страни како би се чврсто спојили прорези. Такође се може користити мало лепка које ће спојити углове. Ако су правилно састављени, четири дела било које боје леже у равни правилног тетраедра и свих пет боја се налазе око сваког петоугаоног отвора. Модел са троугловима је посебно интересантан јер се међу његовим ивицама могу видети ивице пет коцки; ако их на први поглед не видите, оне се могу уочити ако полако ротирате модел.

Сваки од четири преостала модела има по дванаест компонената. За сваки од њих, направите два дела у свакој од шест боја и саставите их тако да су парови супротних делова увек исте боје. Сваки део ће се додиривати са пет суседних који су у преосталих пет боја. Тросмерни углови могу бити незгодни у почетку. Најтежи за склапање је модел који се састоји од дванаест пентаграма, јер сегменти где две звезде пролазе једна кроз другу имају два пара прореза за склапање уместо само једног. Немогуће је дати детаљна упутства за њих. Све што могу предложити јесте да на сваком кораку прво замислите где желите да неки део буде, а онда да га тамо и поставите.

Идеје за рад у учионици, почев од ученика виших разреда основне школе до студената архитектонског дизајна. Пре него што покушају да направе ове конструкције, ученици и студенти треба да претходно изграде свих пет правилних полиедара, како би били упознати са њиховим симетријама. Завршени „уклизавачи“ се могу довести у везу са правилним полиедрима и користити за размишљање на тему броја ивица, темена и пљосни или на тему симетрија. На пример, за конструкцију од 30 квадрата се може поставити питање: Колико има „тросмерних углова“? (Одговор: 20, они се подударају са 20 страница правилног икосаедра. Један од начина да их пребројите се заснива на чињеници да сваки од 30 квадрата додирује два тросмерна угла, а потребна су по три таква споја да дају угао, тако да $30 \times 2/3$ износи 20.) Колико 5-остраних отвора постоји? (Одговор: 12, који се подударају са 12 страница правилног додекаедра; израчунато као $30 \times 2/5$) Колико 5-оструких оса ротације постоји? (Одговор: 6. Свака повезује центре сваког пара супротних 5-оструких отвора.)

Један од могућих сложенијих задатака је да ученици сами направе шаблоне коришћењем или лењира и шестара или неког компјутерског програма за цртање. Кључ у многим случајевима је да се почне са правилним многоуглом и да се пронађу тачке које деле ивице по златном пресеку. (Ово проистиче из својстава златног пресека: петокраке звезде). Прорези, где делови уклизавају један у други, треба у збиру да буду једнаки дужини сегмента пресека.

Након вежбе са овим моделима, који су величине диње, ова идеја се може применити на веће моделе. Студенти на предмету дизајна архитектуре који је држала проф. Патрициа Муњоз на Универзитету у Буенос Аиресу су направили велике картонске верзије (око један и по метар у пречнику)

На средњошколском или вишем нивоу се могу користити изграђени модели за истраживање тема у комбинаторици, на пример са 30 квадрата: Колико различитих кругова у пет боја је могуће поставити око

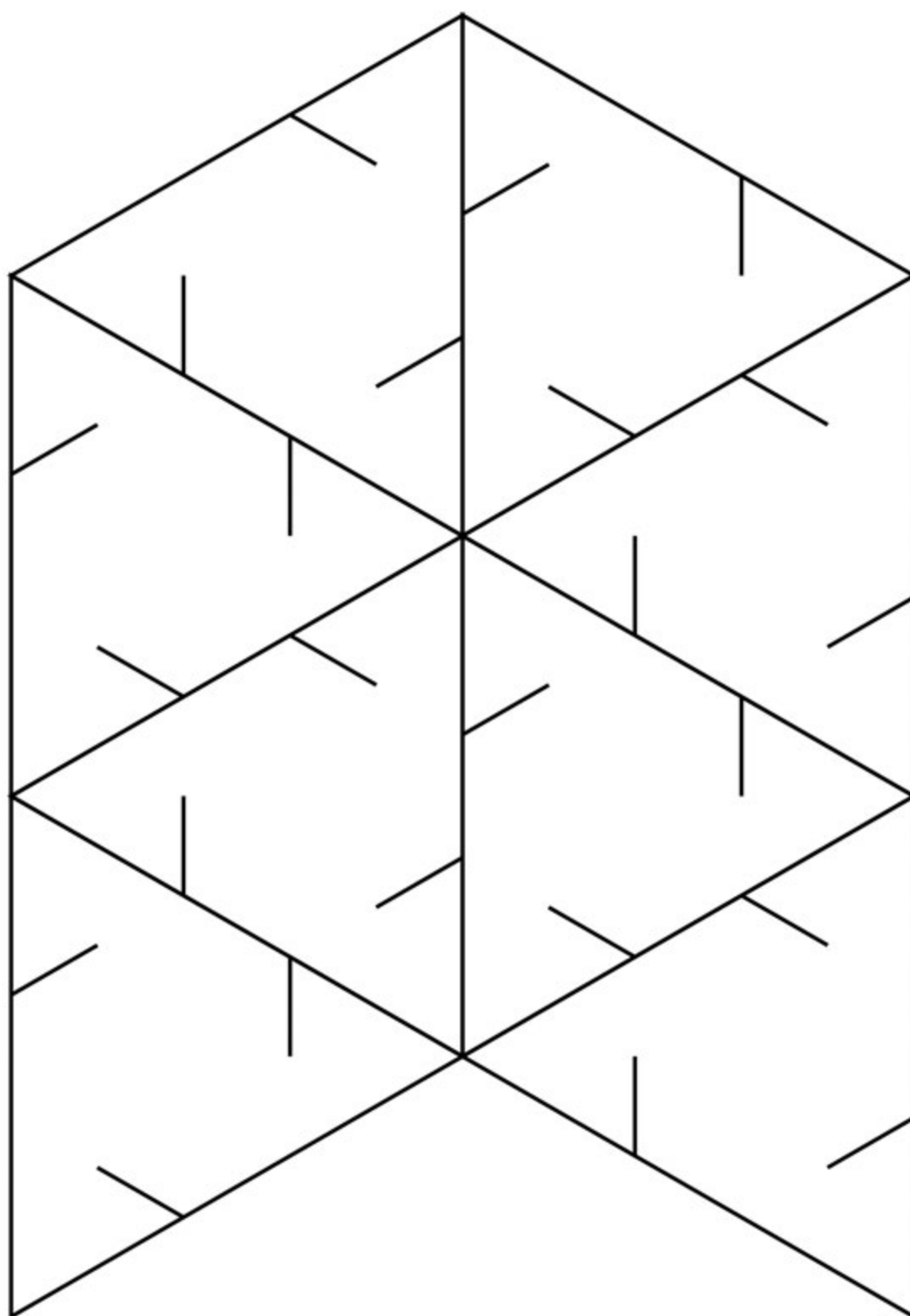
петострукога отвора? (Одговор: 24, што је $5!/5$, јер постоји 5 пермутација ових боја, а изједначавамо групе од пет које представљају цикличне ротације). Колико различитих кругова је присутно на једном моделу? (Одговор: 12, по један око сваког од 12 отвора.). Колико различито обојених модела има у учионици? (Одговор: 2 - Ако је редослед почетног круга од пет боја случајно одабран, отприлике пола одељења ће имати један шаблон боја, а друга половина ће имати други.) Шта одређује којих 12 од 24 могућих цикличних редоследа се налазе у истом моделу? (Одговор: „парне“ пермутације од пет боја увек припадају истом моделу.)

Литература

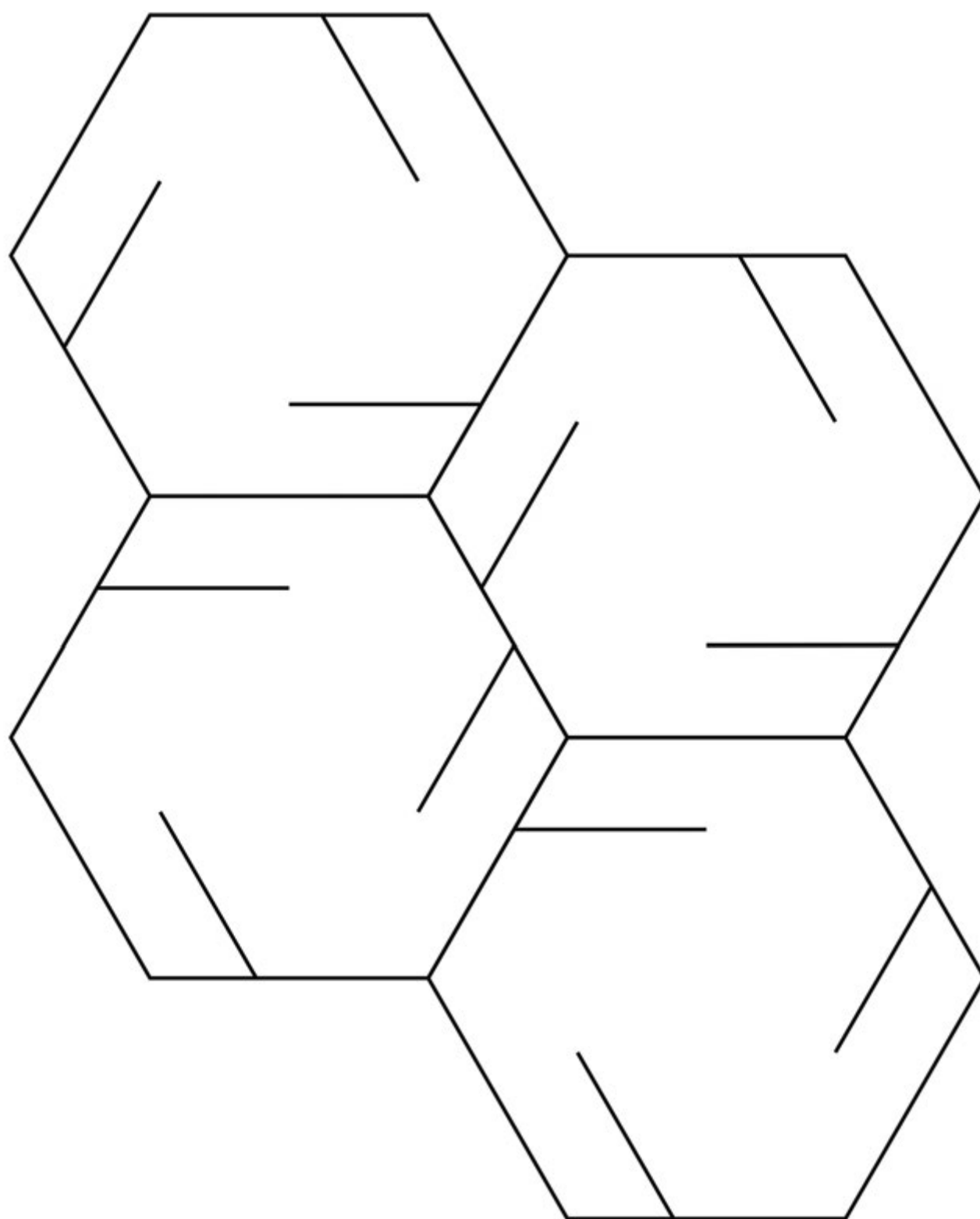
Чарлс Батлер ми је описао дизајн једног модела са троугловима и једног са квадратима. Друге сам дизајнирао на основу избора потскупа униформних полиедара.

На сајту <http://www.georgehart.com> се налазе 3Д модели свих 7 конструкција у „виртуелној реалности“, који се ротирају у три димензије уз помоћ одговарајућег додатка на Интернет прегледачу. Овакав приказ пружа богатији увид у структуре од 2Д слика, па може представљати боље упутство за склапање.

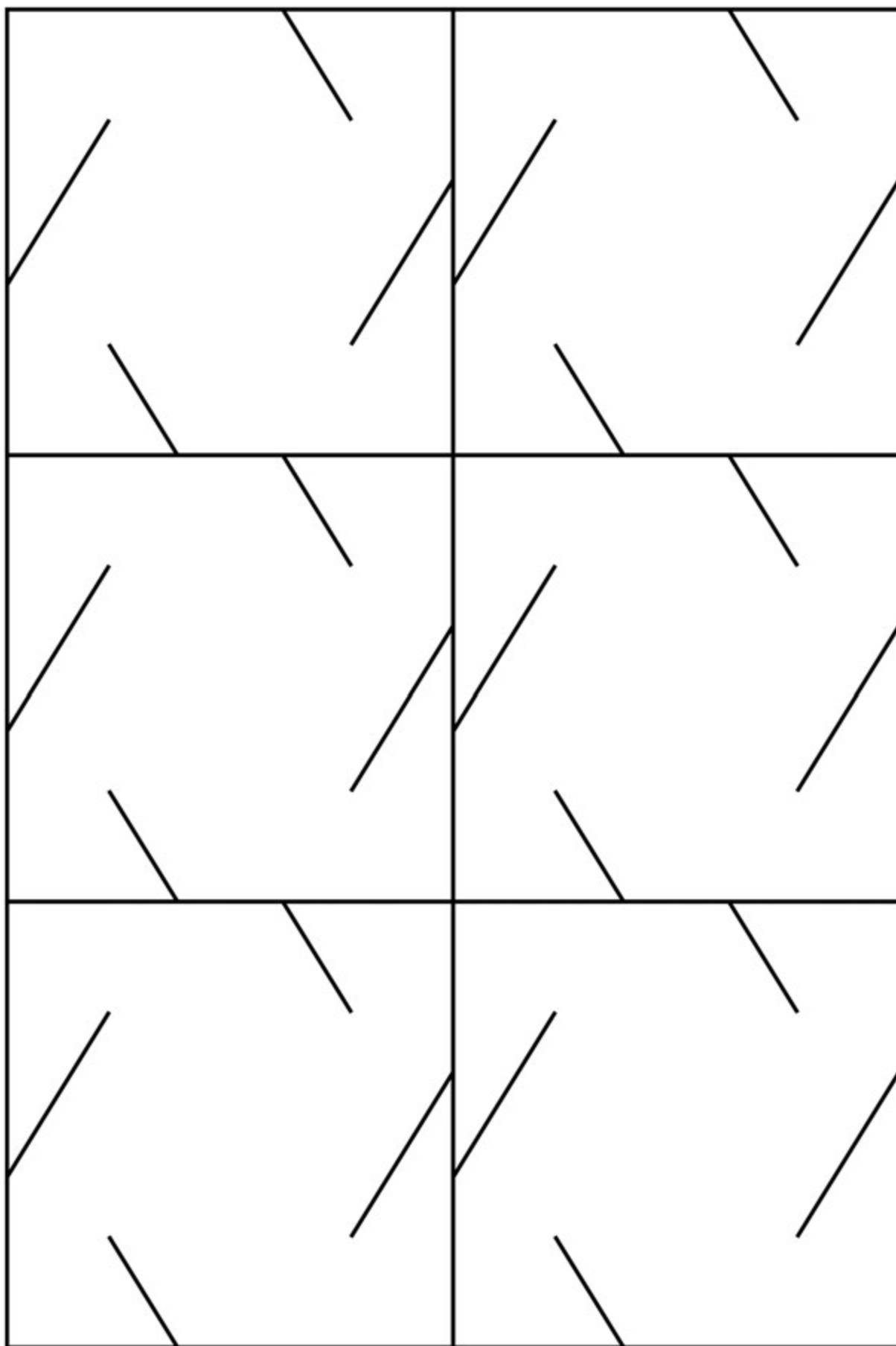
Делови овог материјала су се појавили у брошури „Радионица за наставнике“ са конференције „Мостови“ (Bridges Conference) одржане 2004. године.



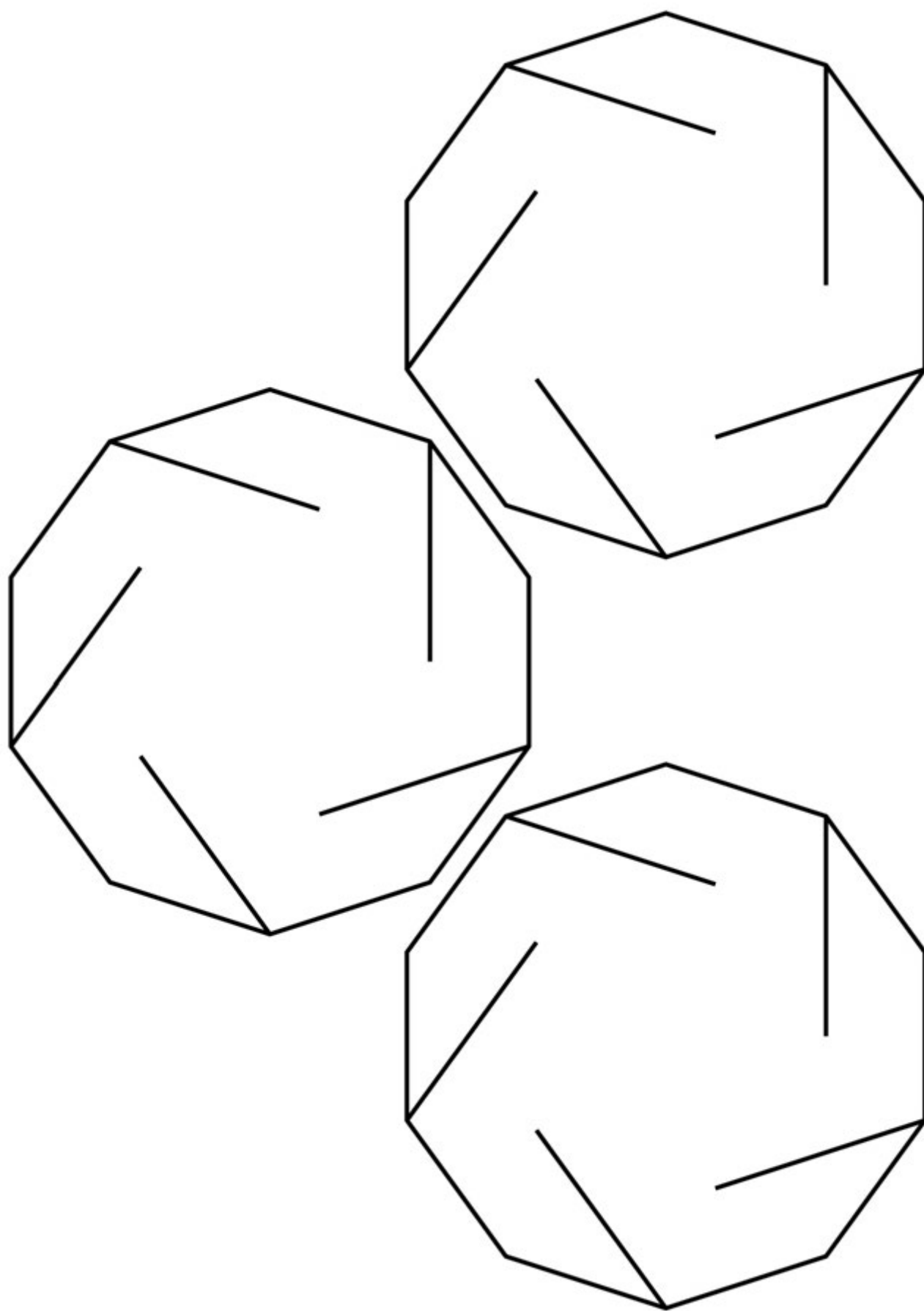
Шаблон за троугаони „уклизавач“ — направите пет копија за два модела



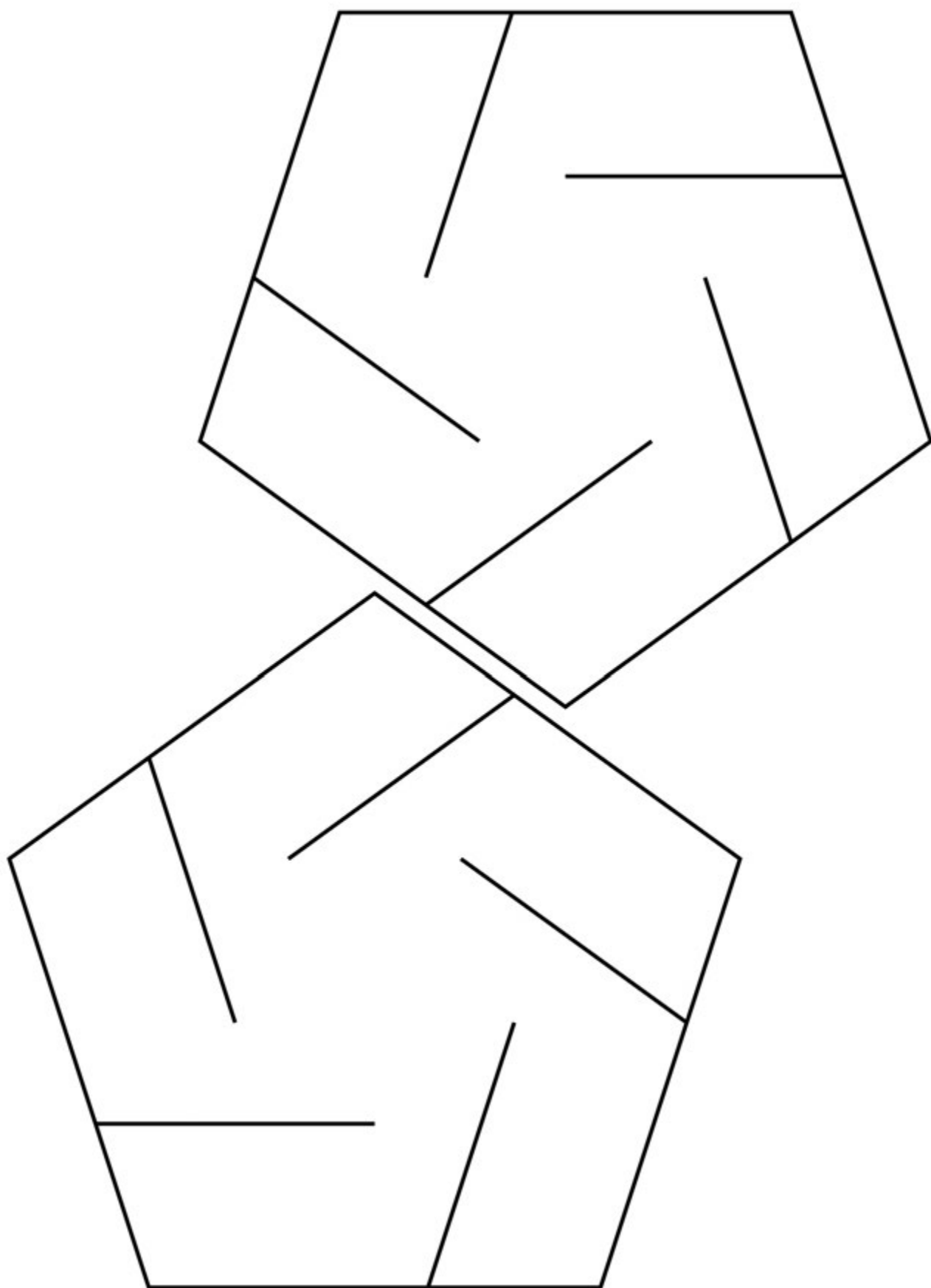
Шаблон за шестоугаони „уклизавач“ — направите пет копија за један модел



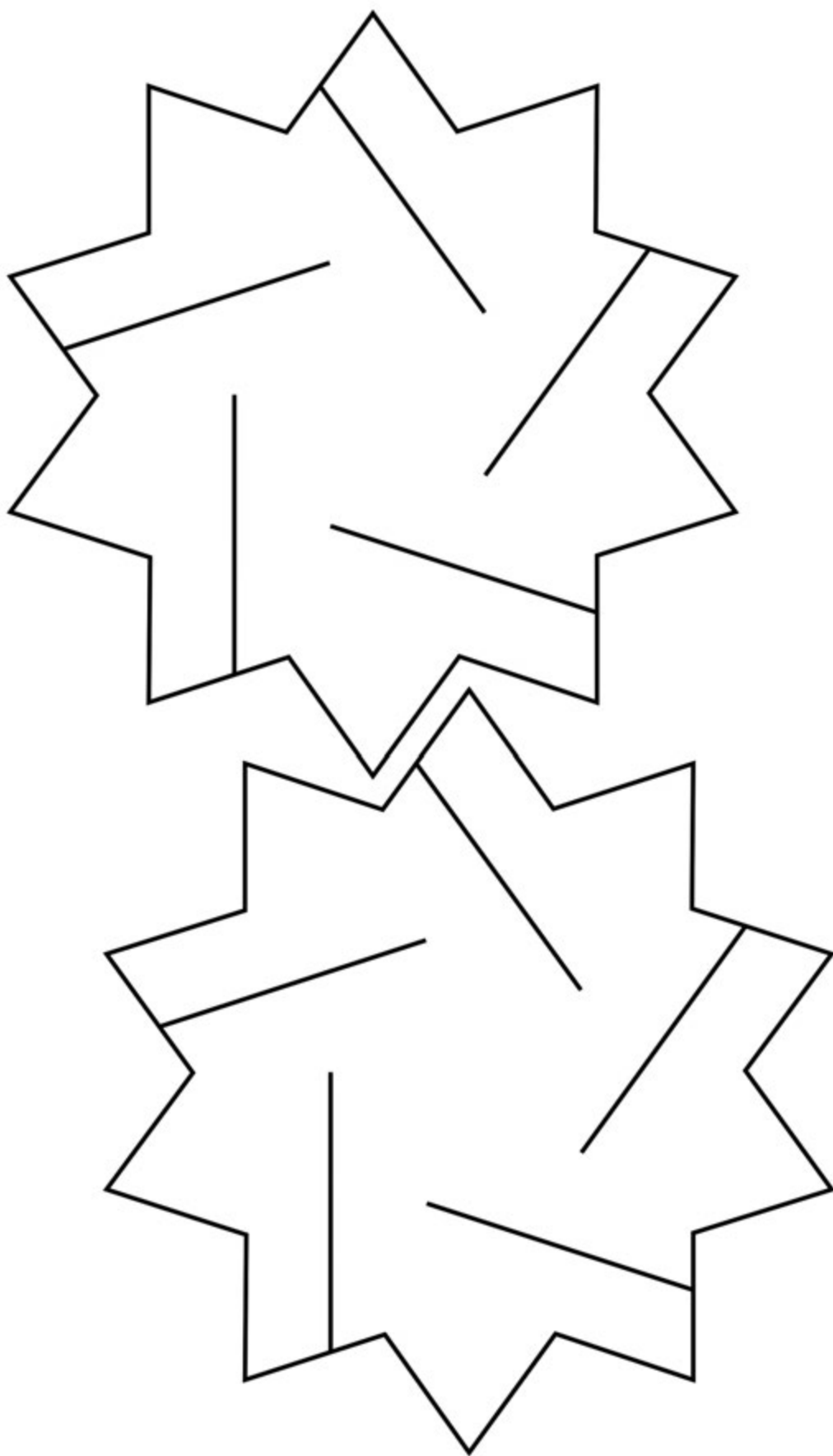
Шаблон за квадратни „уклизавач“ — направите пет копија за један модел



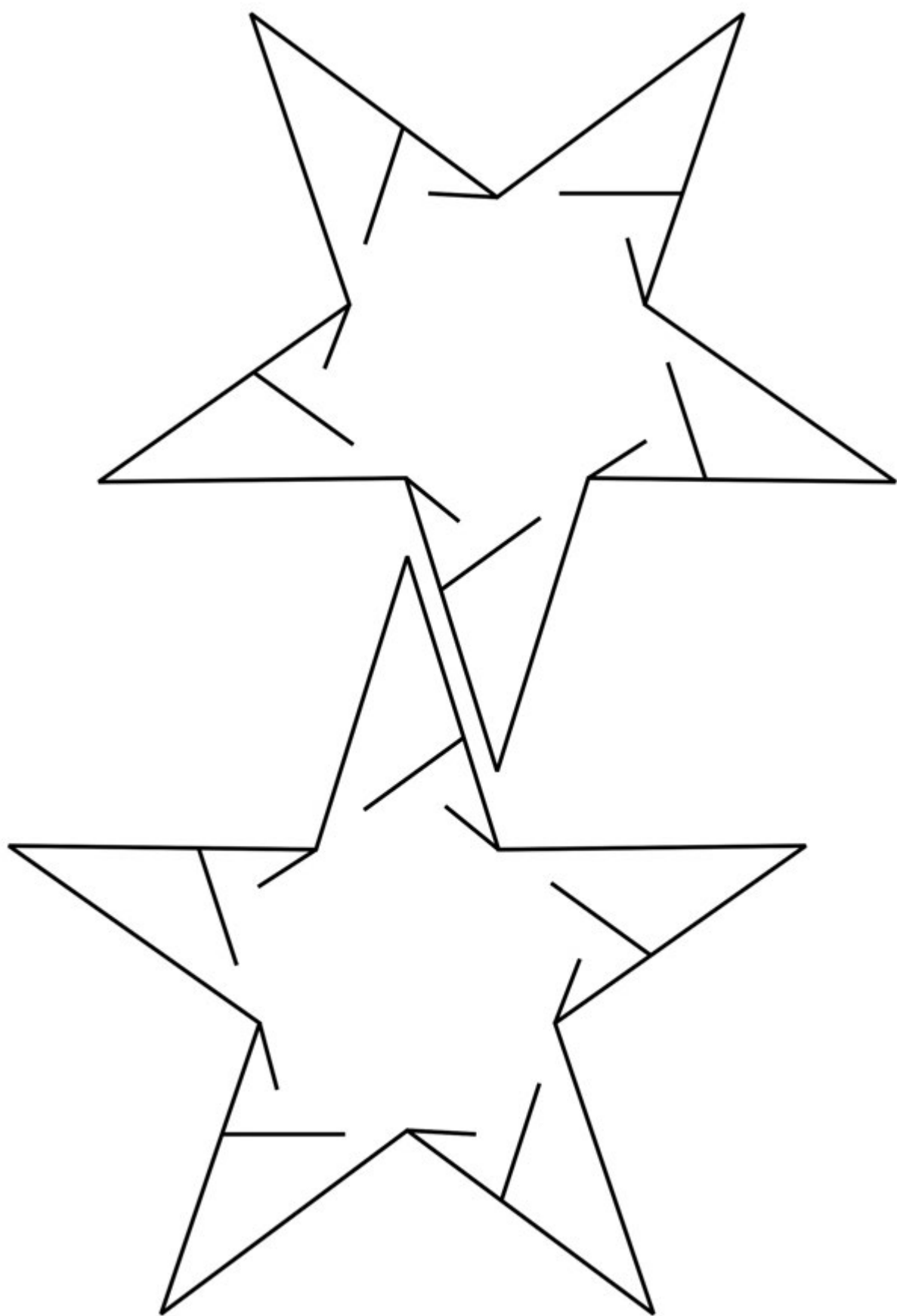
Шаблон за десетоугаони „уклизавач“ — направите шест копија за 1.5 модел



Шаблон за петоугаони „уклизавач“ —направите шест копија за један модел



Шаблон „уклизавача“ у облику декаграма — направите шест копија за један модел



Шаблон „уклизавача“ у облику пентаграма — направите шест копија за један модел



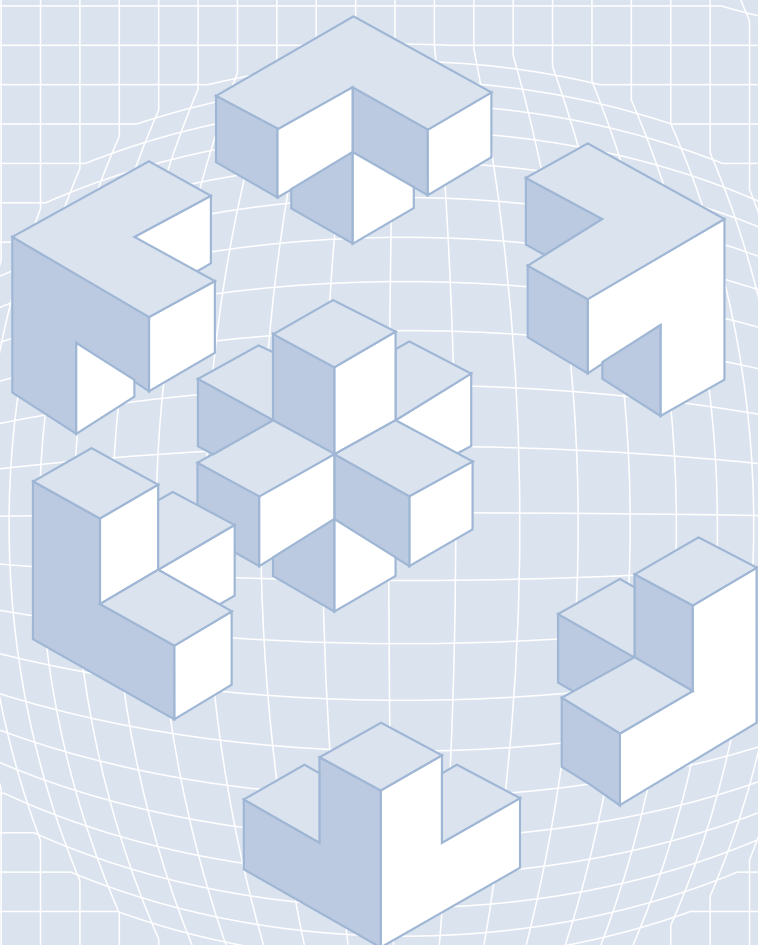
VISUALITY &
MATHEMATICS

EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

Ринус Ролофс:

Леонардови издигнути полиедри – модели

ПАПИРНЕ СКУЛПТУРЕ



Ринус Ролофс је рођен 1954. Након студија примењене математике на Техничком универзитету у Еншедеу дипломирао је на Академији уметности у Еншедеу са специјализацијом у скулптури. Његове радове углавном наручују општине, институције и компаније у Холандији, али су његови радови излагани и широм света, нпр. у Риму, као део прославе стогодишњице Ешеровог рођења 1998. Од 2003. он је један од организатора конференција „Мостови“ (Bridges Conference) чија је тема веза између уметности и математике.



Публикације

Углови и ивице – широм Европе (Ecken und Kanten – Europaweit), 2014, каталог изложбе у Музеју математике у Гисену, Немачка (Mathematikum Giessen, Germany).

Откриће новог низа униформних полиедара (The Discovery of a New Series of Uniform Polyhedra), 2013, Зборник радова са конференције „Мостови“ (Bridges Proceedings).

Повезане рупе (Connected Holes), 2008, каталог изложбе на Техничком универзитету у Еншедеу, Холандија (Technical University of Enschede, Netherlands).

Увод

Главна тема моје уметности је моја опчињеност математиком. Да будем прецизнији: моја опчињеност математичким структурама. Математичке структуре се могу наћи свуда око нас. Можемо их видети свуда у нашем свакодневном животу. Употреба ових структура као визуелних украса је тако честа да ми то чак и не видимо као математику. Али проучавање особина тих структура, а посебно односа између различитих структура може довести до питања која могу бити почетак занимљивих уметничких истраживања.

Уметничка истраживања ове врсте углавном доводе до интригантног дизајна скулптуралних објеката, који се потом праве од свих врста материјала, као што су папир, дрво, метал, акрил, итд... Све почиње са чуђењем, покушавајући да схватите шта видите. Решавање тих питања често доводи до нових идеја, нових замисли.

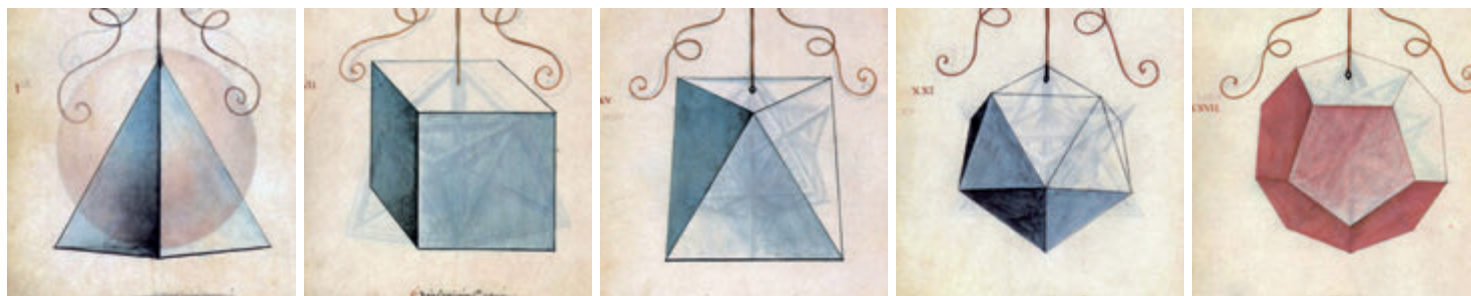
Пошто користим рачунар као мој блок за цртање, ове идеје се реализују у стварности прво као слика на екрану. Одатле могу да одлучим шта мора да буде следећи корак ка физичкој реализацији: приказана слика, анимација или 3Д-физички модел направљен коришћењем РНУ машине, ласерско сечење или брза израда прототипова. Већином, први физички модел је модел од папира, једноставно исечен, савијен и залепљен.

Међутим, данас се могу користити многе различите технике, као и различити материјали. Али, све то је засновано на мојој опчињености математичким структурама.

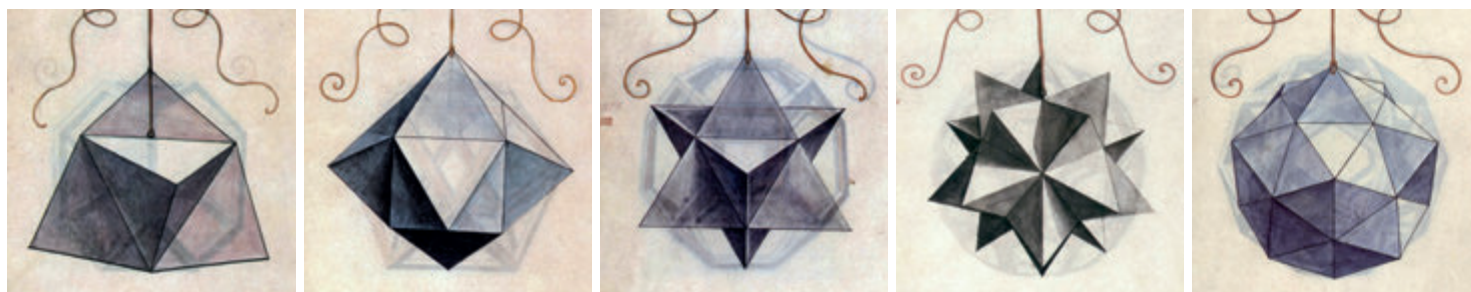
У математици област полиедара заслужује посебну пажњу. Лепо је израдити реалне физичке моделе од којих можете научити много о лепоти симетрије и структурама. Када имате прве моделе Платонових тела (правилних полиедара) онда добијате инспирацију и можете доћи до идеје о варијацијама на овим моделима. У књизи „Божанска пропорција“ (Divina Proportione) Луке Пачолија и Леонарда да Винчија наћи ћете цртеже основних полиедара, а такође једну занимљиву варијацију која се зове издизање.

Модели од папира се могу врло лако направити. За овде описане моделе само нам требају три различита шаблона који се могу наћи у прилогу.

У својој књизи „Божанска пропорција“ [2] Лука Пачоли и Леонардо да Винчи су приказали издигнуте верзије свих Платонових полиедара, као и неких од Архимедових полиедара. Платонова тела као и њихова издигнућа, онако како их је нацртао Леонарда да Винчи су приказана на сликама 1 и 2.



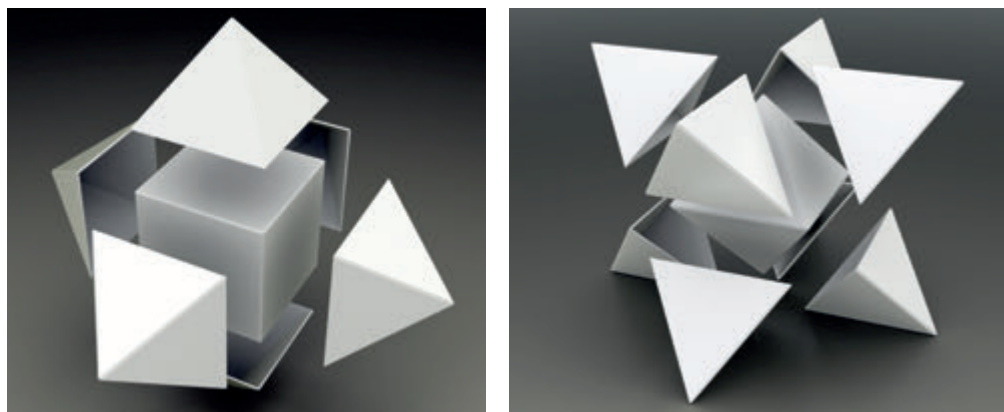
Слика 1: Леонардови цртежи Платонових тела.



Слика 2: Леонардови цртежи издигнућа Платонових тела.

Шта је тачно издигнута верзија неког полиедра? У „Божанској пропорцији“ [3], поглавље XLIX, параграф XI.XII, Пачоли описује издигнуту верзију коцке на следећи начин: „... она је ограничена са 24 троугаоних површи. Овај полиедар се састоји од 6 четвоространих пирамида, које заједно граде спољашност објекта, као што можете да видите својим очима. А постоји и коцка унутра, на којој се налазе пирамиде. Али, ова коцка може само да се замисли у машти, јер је покривена пирамидама. Шест квадратних површи су основе 6 пирамида.“ Дакле, овај објекат се састоји од укупно 24 једнакостраничних троугаоних површи и 6 сакривених квадратних површи, као што се може видети на расклопљеним објектима на Слици 3.

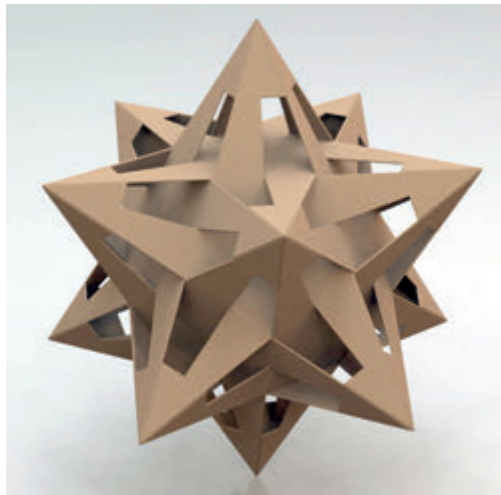
Слика 3:
Слике расклопљене
издигнуте коцке и
октаедра.



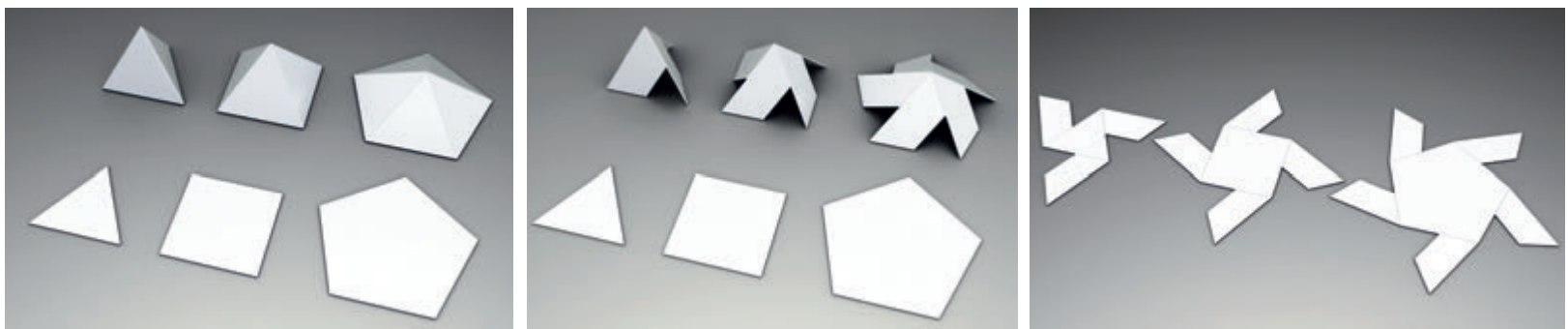
О „Издигнутом октаедру“ (Octahedron Elevatus) Пачоли пише (Поглавље L, параграф XIX.XX): „И овај објекат се састоји од 8 тространих пирамида, које можете видети својим очима, и октаедра унутра, који можете само да замислите у својој машти.“ То значи да је објекат састављен од 32 једнакостраничне троугаоне површи, од којих су 8 сакривене.

Пачоли описује процес издизања као стављање пирамида, изграђених од једнакостраничних троуглова, на сваку од пљосни полиедара. Резултат ове операције је један двослојни објекат који има много сличности са звездастом верзијом полиедра. Леп пример представља Ешеров графика „Гравитација“. Начин на који је Ешер "отворио" полиедар нам врло добро показује оба слоја. Ешеровим сопственим речима: „Ова звезда-додекаедар је изграђена од дванаест петокраких звезда. На свакој од ових платформи живи чудовиште без репа и његово тело је заробљено испод једне петостране пирамиде.“ Ешер говори о пирамидама постављеним на платформама (пљоснима полиедра), баш као Пачолијева издигнућа.

Слика 4: М. К. Ешер – „Гравитација“. Основни облик је звездасти додекаеадар.

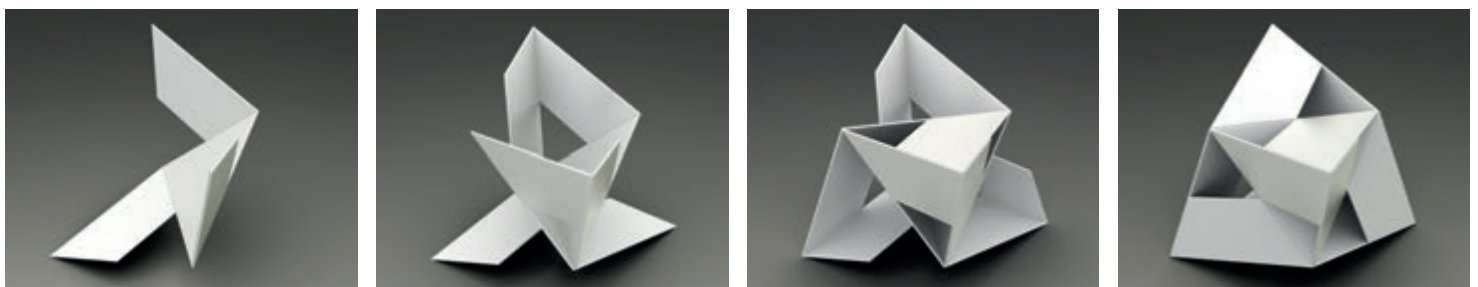


Испоставило се да је начин на који је Ешер отворио полиедар савршено решење за израду модела издигнутих полиедара.



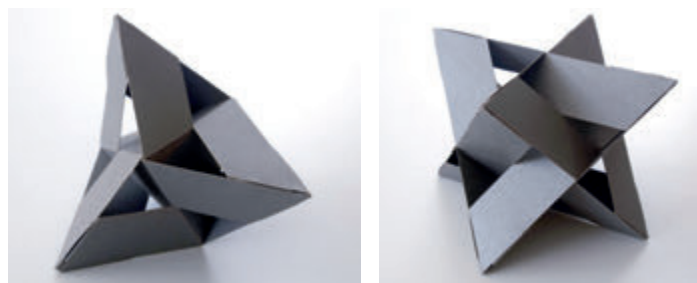
Слика 5: Развијање основних елемената за издигнуте моделе.

Елементе који су нам потребни да направимо модел издигнутог полиедра можемо конструисати на следећи начин: повезивањем пљосни „отворене“ пирамиде на ивицама њене основе. За издигнута Платонова тела (правилне полиедре) то морамо да урадимо са тространим, четвоространим и петостраним пирамидама. Тако добијамо три различита грађевинска елемената (Слика 5, десно) чије цртеже можете видети у прилогу.



Слика 6: Изградња издигнутог тетраедра.

Да бисмо изградили модел издигнутог тетраедра почињемо са четири троугаона елемента. Процес изградње се може описати на следећи начин: изнад сваке троугаоне површи морамо да изградимо тространу пирамиду.



Слика 7: Модел издигнутог тетраедра и издигнутог октаедра

Са осам таквих елемената можемо изградити модел издигнутог октаедра.



Слика 8: Изградња издигнутог икосаедра.

За трећи модел, издигнути икосаедар, треба да исечемо двадесет троугаоних елемената.

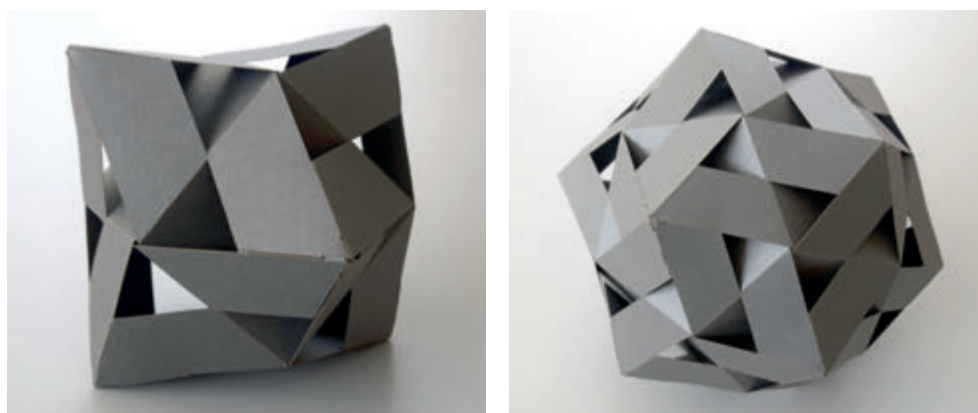


Слика 9: Модели издигнутих полиедара са троугаоним елементима.

Тако добијамо сва звездаста Платонова тела које можемо да изградимо од троугаоних елемената. За следећи модел, издигнуту коцку, морамо да исечемо шест квадратних елемената, а затим конструишемо четворостране пирамиде изнад сваке квадратне плjosни коцке.

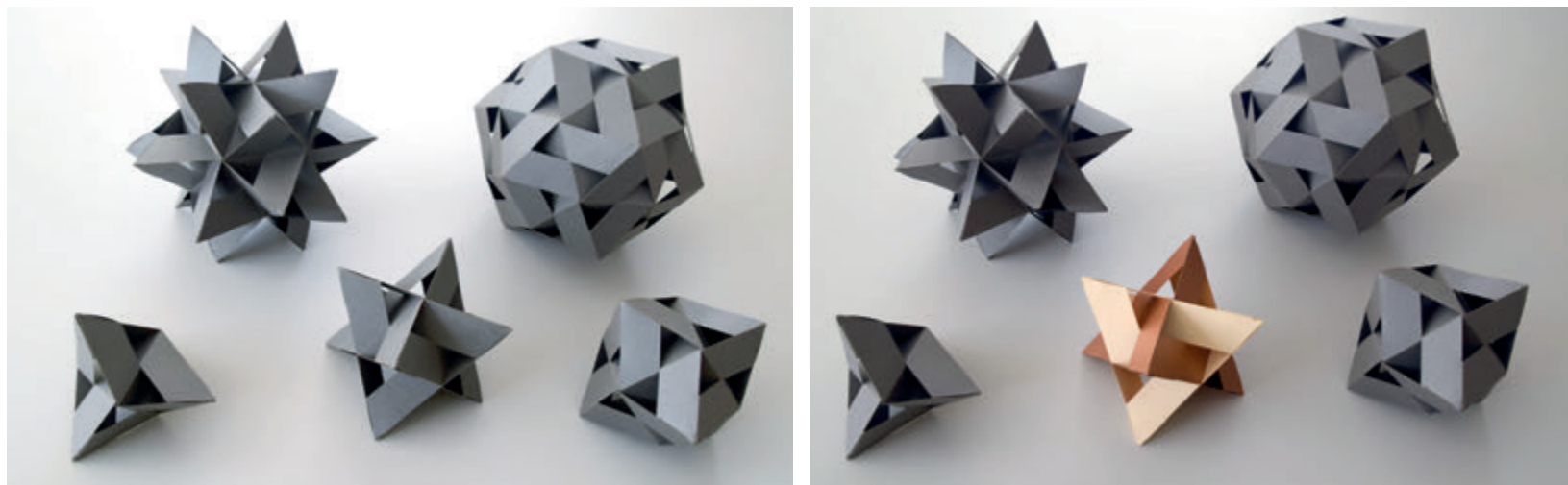


Слика 10: Изградња издигнуте коцке



Слика 11: Модели издигнуте коцке и издигнутог додекаедра.

Најсложеније звездасто Платоново тело, звездасти додекадар, може се направити од дванаест петоугаоних елемената.



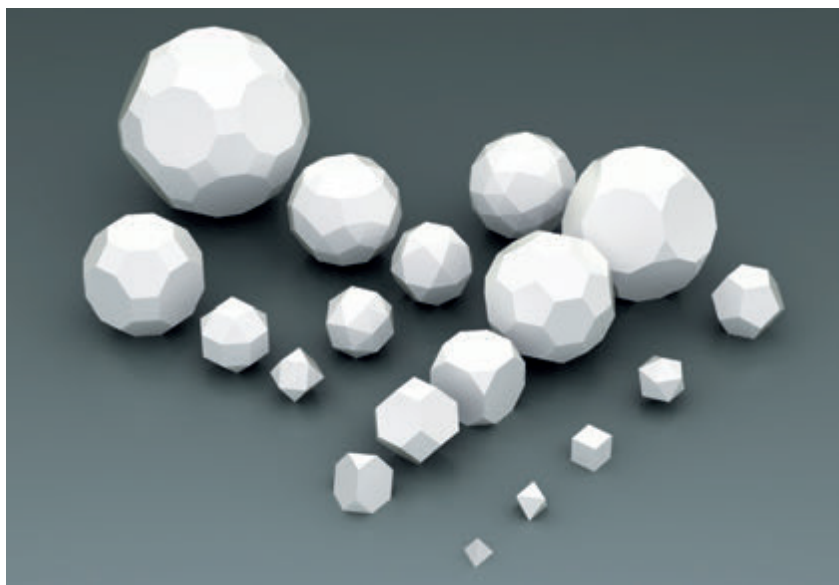
Слика 12: Модели издигнутих Платонових тела.

Посматрајући цео скуп модела које смо до сада изградили, видимо да се један од тих модела, звездасти октаедар, може посматрати као склоп два тетраедра. Коришћење две различите боје чини ово видљивим и постоји једна фина сличност између модела од папира и Ешеровог „Двоструког планетоида“.



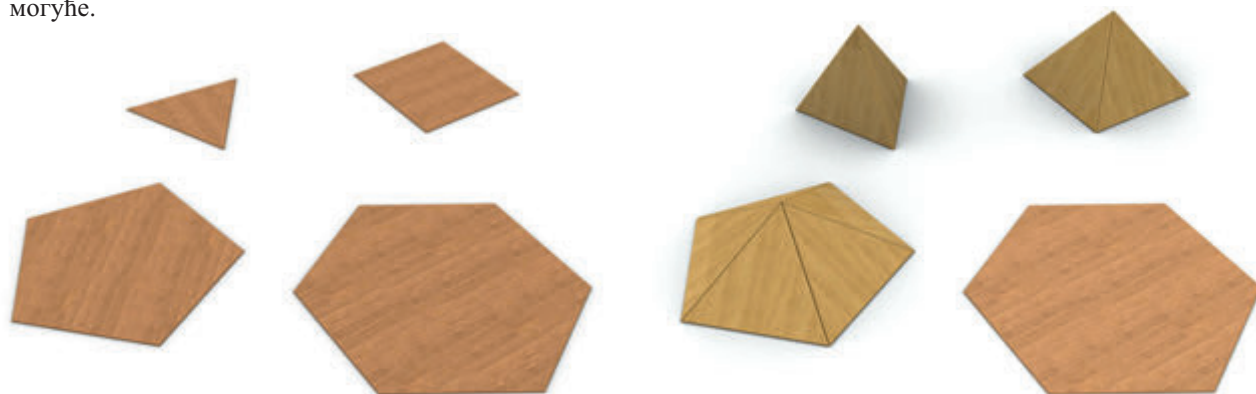
Слика 13: Издигнути октаедар је склоп два тетраедра.

Следећи корак је потрага за звездастим полиедрима које можемо добити од Архимедових тела.



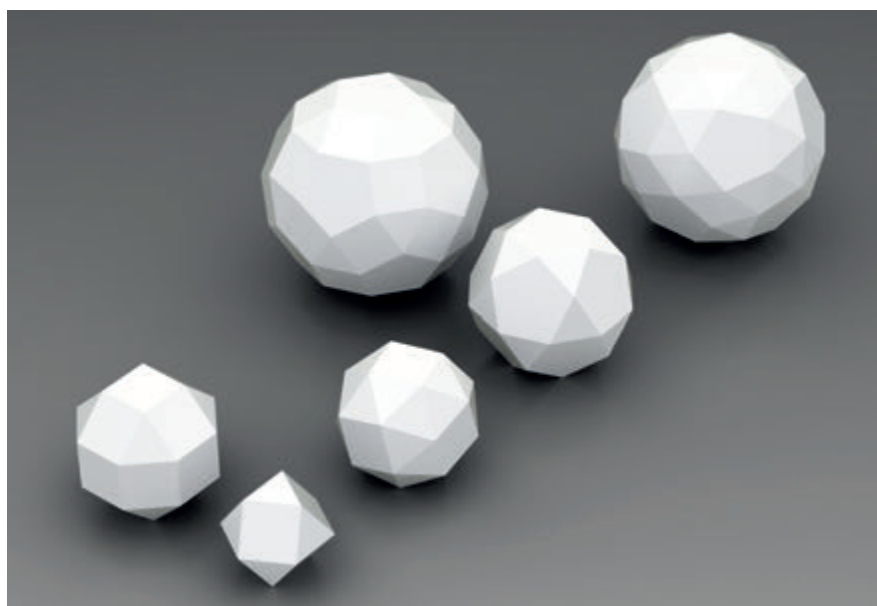
Слика 14: Архимедова и Платонова тела.

Да бисмо извршили стелацију полиедра морамо поставити по један правилни тетраедар на сваку пљосан полиедра. Као што можете видети на Слици 15, само су троугране, четворостране и петостране пирамиде могуће.



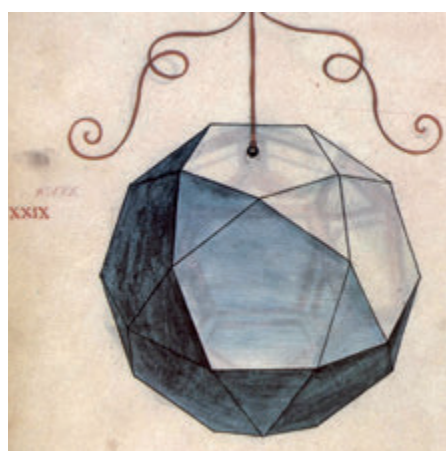
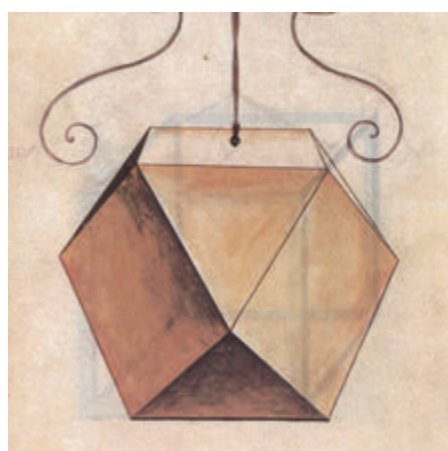
Слика 15: Могућа издигнућа правилних полигона.

Из целог скупа Архимедових тела, може се користити само шест тела за процес стелације. Она су приказана на Слици 16.

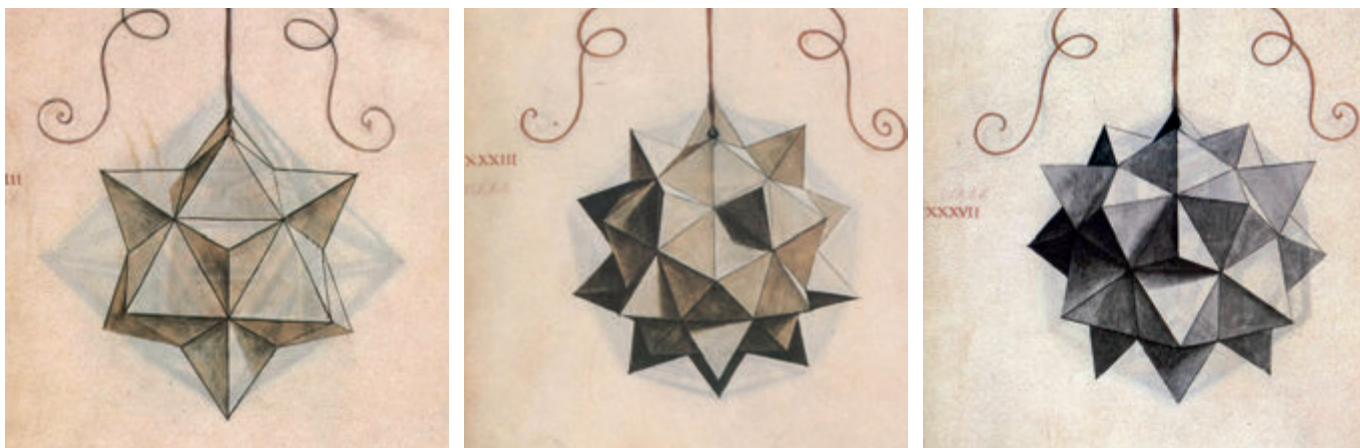


Слика 16: Шест Архимедових тела који се могу издигнути.

У књизи „Божанска пропорција“ налазимо само три: кубоктаедар, икосододекаедар и ромбокубоктаедар.



Слика 17: Леонардови цртежи три Архимедова тела.



Слика 18: Леонардови цртежи издигнућа три Архимедова тела.

Моделе од папира свих ових тела можемо направити од три различита елемента.



Слика 19: Модели од папира три Архимедова тела.

Поред ова три Архимедова издигнућа можемо направити и звездсту засечену (snub) коцку, издигнути засечени додекаедар и издигнути ромбоикосодекаедар. Укупно сада имамо једанаест издигнутих полиедара. Постоји посебан подскуп ових једанаест полиедара са занимљивим својствима. На Слици 20 приказани су такозвани "Прстенасти полиедри". Ови полиедри могу бити обојени у само две боје на такав начин да не постоје две суседне површине исте боје. Издигнуте верзије ових полиедара ће стога бити склопови које можемо направити као двобојне моделе.



Слика 20: Пет Прстенастих полиедара.

На Сlici 21 приказани су склопови Леонардових издигнућа.

*Слика 21:
Четири
Леонардова
издигнута
полиедра су
склопови.*

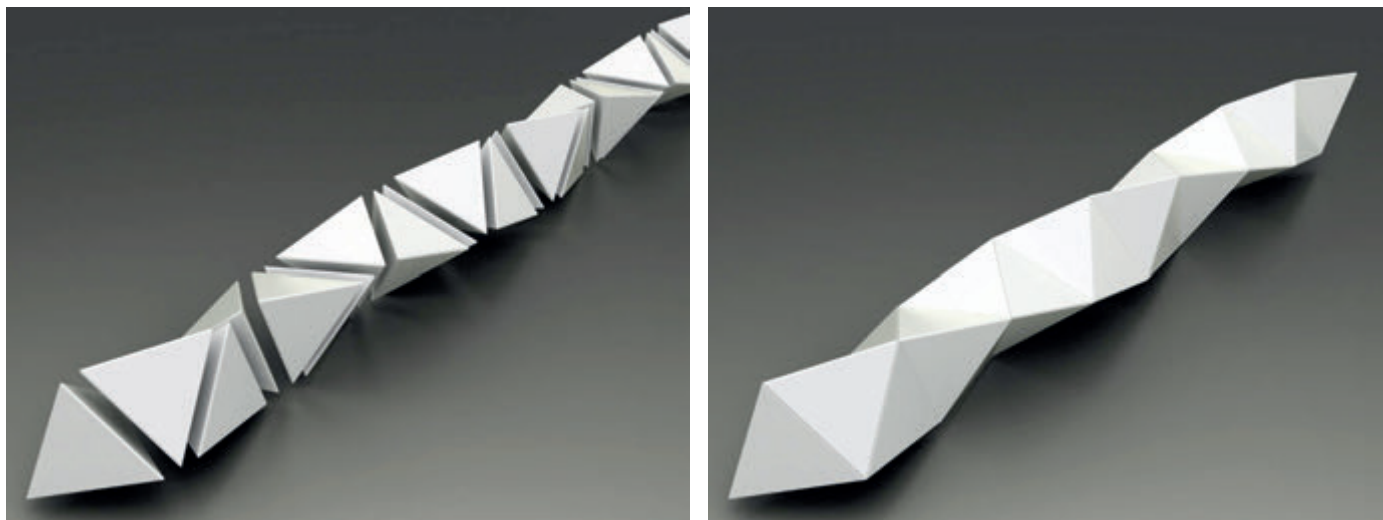


Постоји још много полиедара које можемо изградити са нашим елементима. Прва група коју можемо проучавати јесте група делтаедара. Постоји осам конвексних делтаедара и од наших елемената можемо направити издигнуте верзије сваког од њих.

*Слика 22: Осам
делтаедара.*

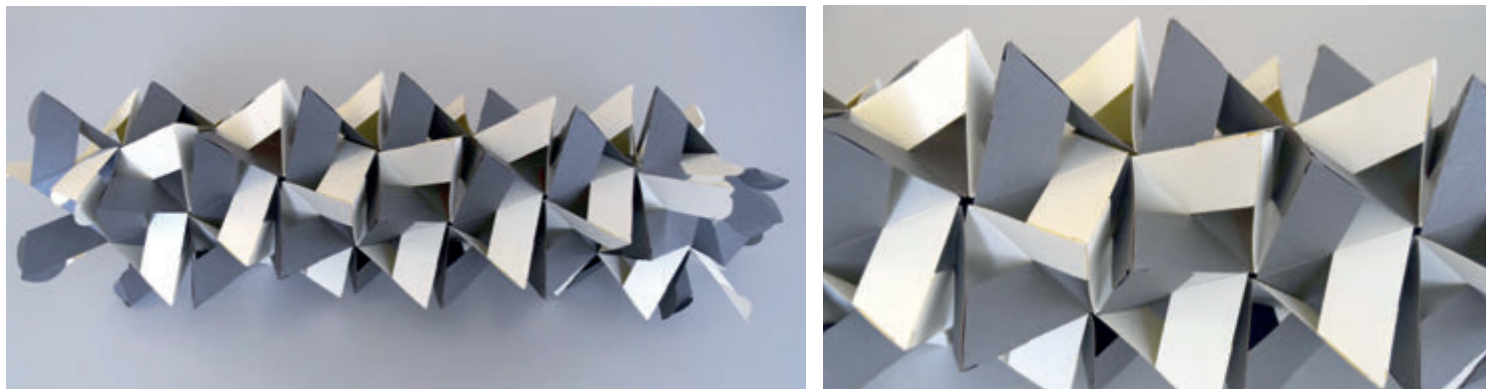


У ствари, од једног полиедра изграђеног од троуглова, квадрата и/или петоуглова, од наших елемената можемо направити папирни модел издигнуте верзије. Леп пример је Тетрахеликс.



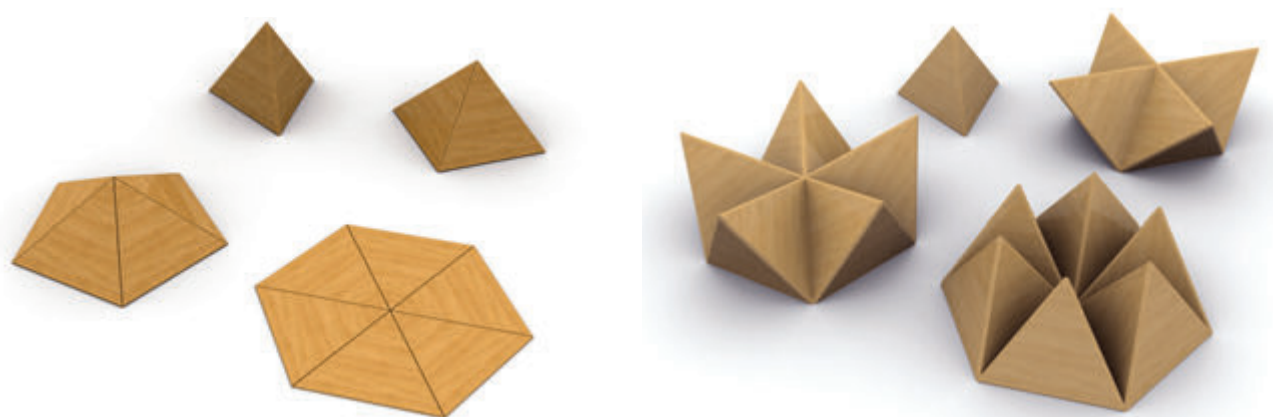
Слика 23: Тетрахеликс

Нарочито лепе моделе добићете ако користите више од једне боје.



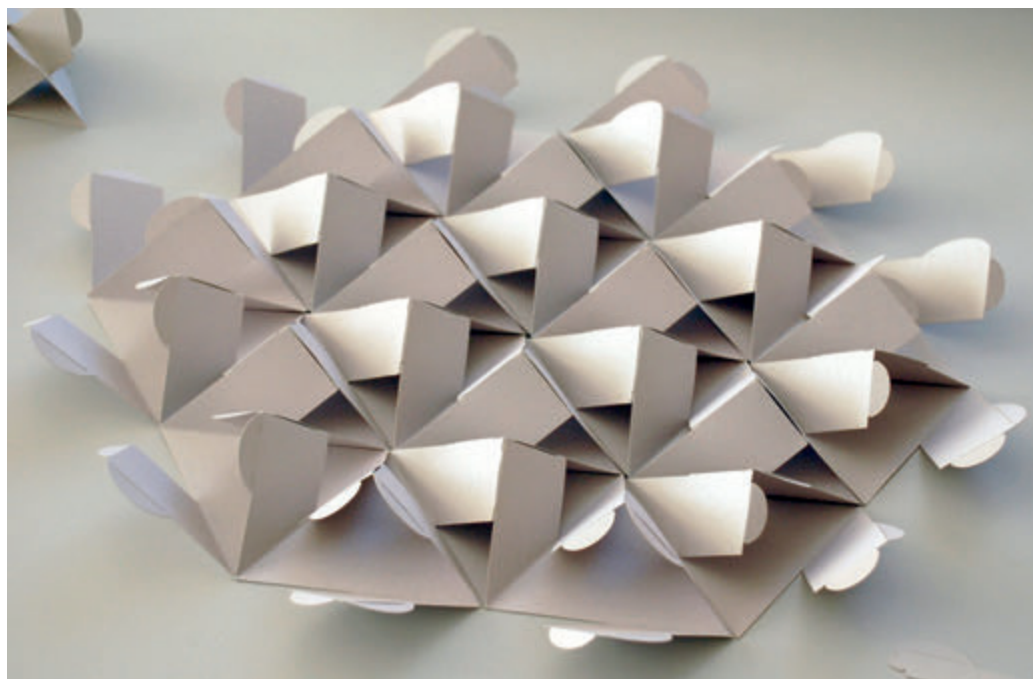
Слика 24: Издигнута верзија тетрахеликса направљена од троугаоних елемената.

Идеја издигнућа се може применити не само на полиедре, већ и на поплочавања равни.



Слика 25: Издигнуће је такође могуће и са равним шаблонима.

На пример, полазећи од поплочавања $3,3,3,3,3,3$ у којем су све плочице једнакоугаоне троуглови и по 6 их се сустиче у сваком темену, можемо ставити по једну тространу пирамиду на сваку плочицу. Када отворимо пирамиде као што је Ешер урадио, можемо направити модел са троугаоним елементима као што је приказано на Сlici 26.



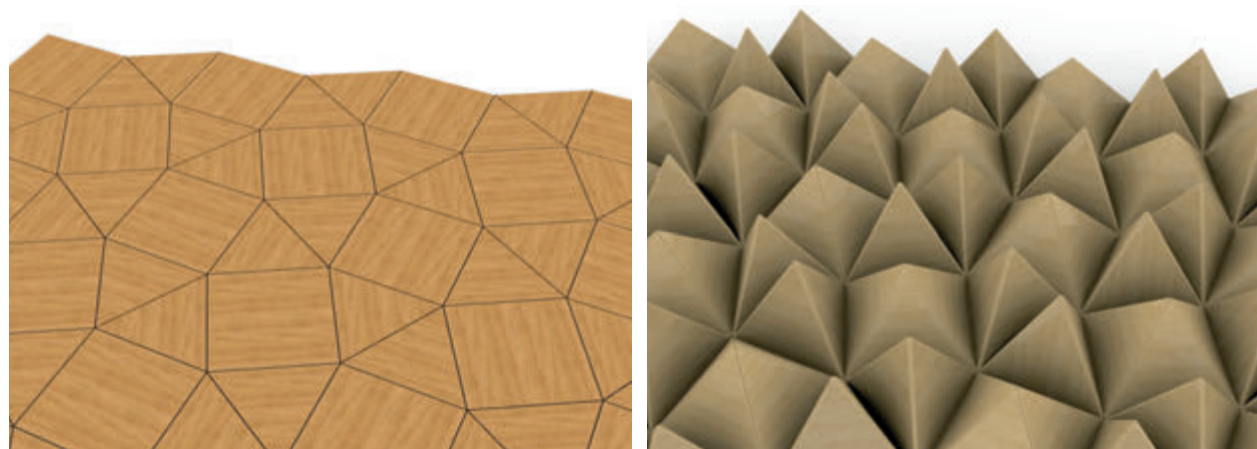
Слика 26: Модел издигнућа раванског $3,3,3,3,3,3$ -поплочавања, изграђен од троугаоних елемената.

Исту стратегију можемо применити на поплочавање квадратима 4,4,4,4. На тај начин, добијамо два правилна издигнута раванска поплочавања.



Слика 27: Издигнуће троугаоних и квадратних шаблона.

Постоји још једно Архимедово раванско поплочавање које можемо користити на овај начин: поплочавање 3,3,4,3,4 приказано на Слици 28.



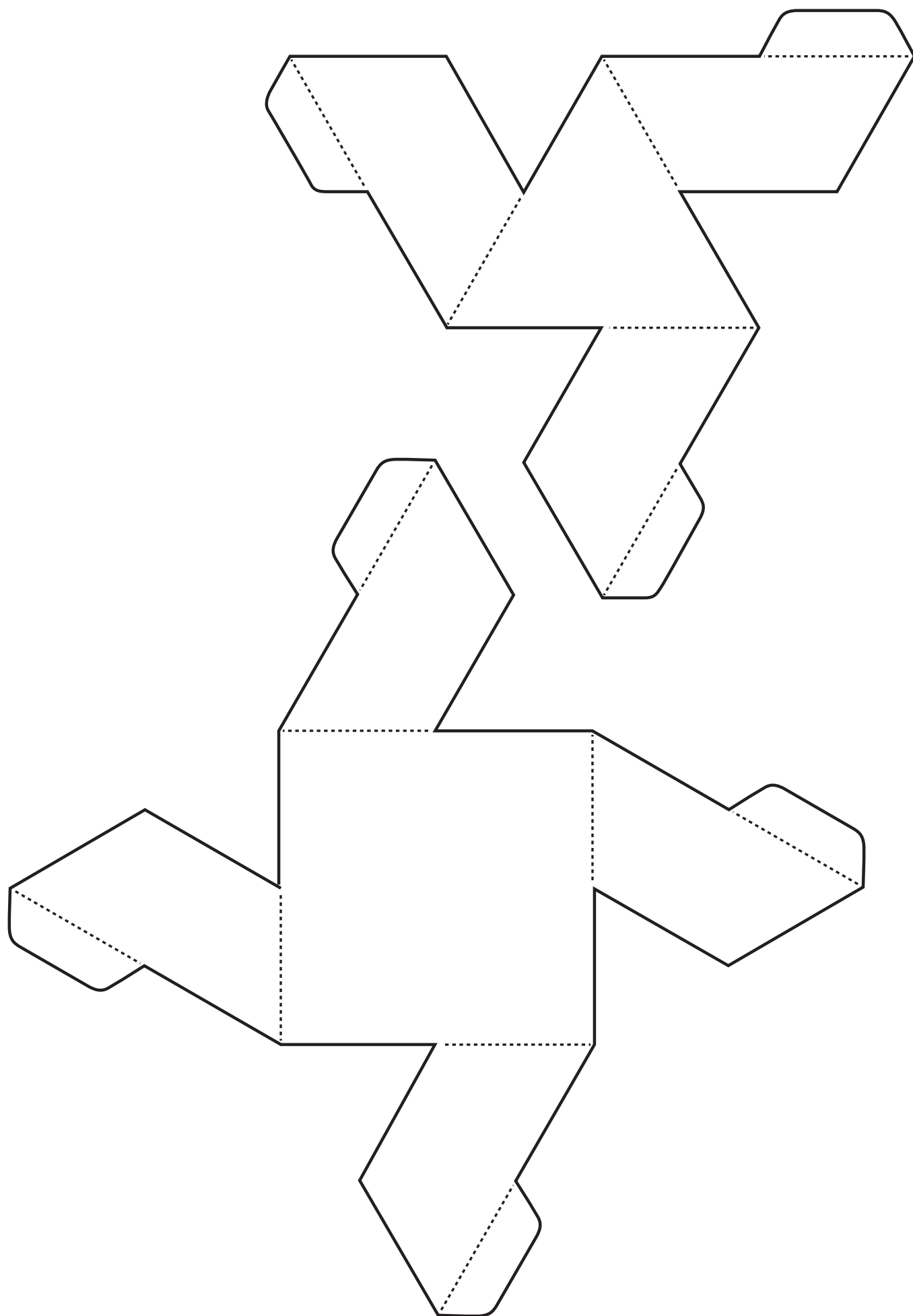
Слика 28: Издигнуће Архимедовог поплочавања 3,3,4,3,4.

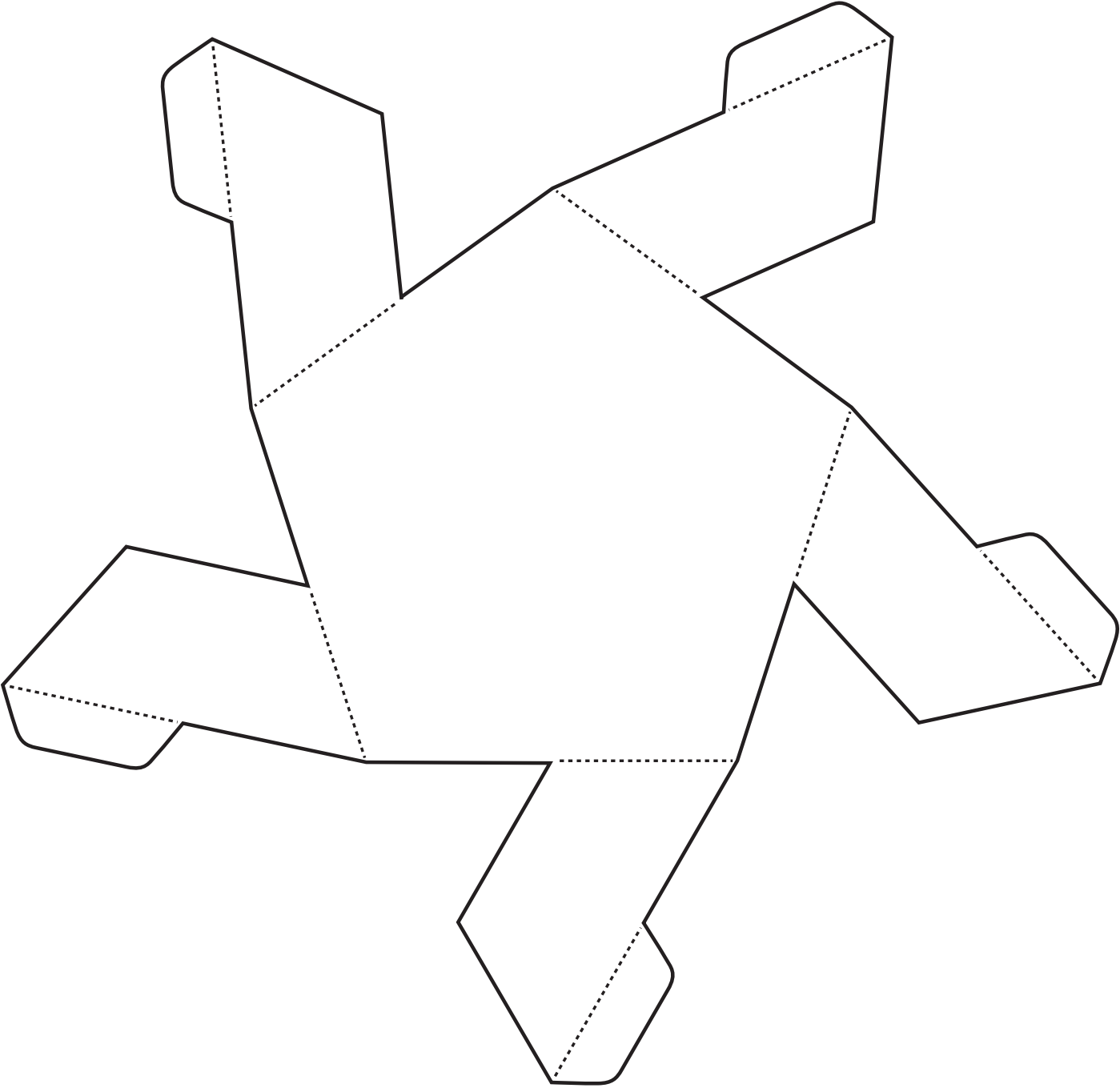
Папирни модел издигнућа је приказан на Слици 29.

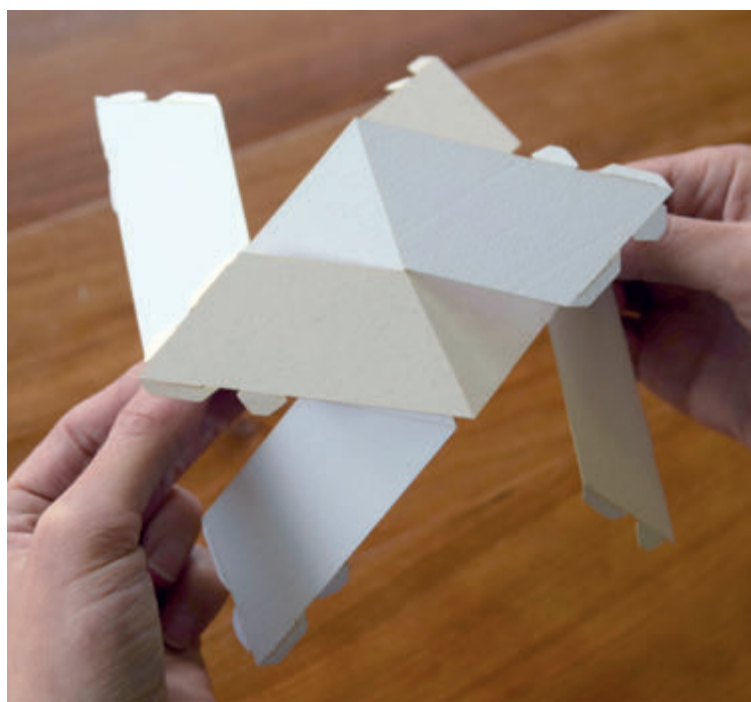
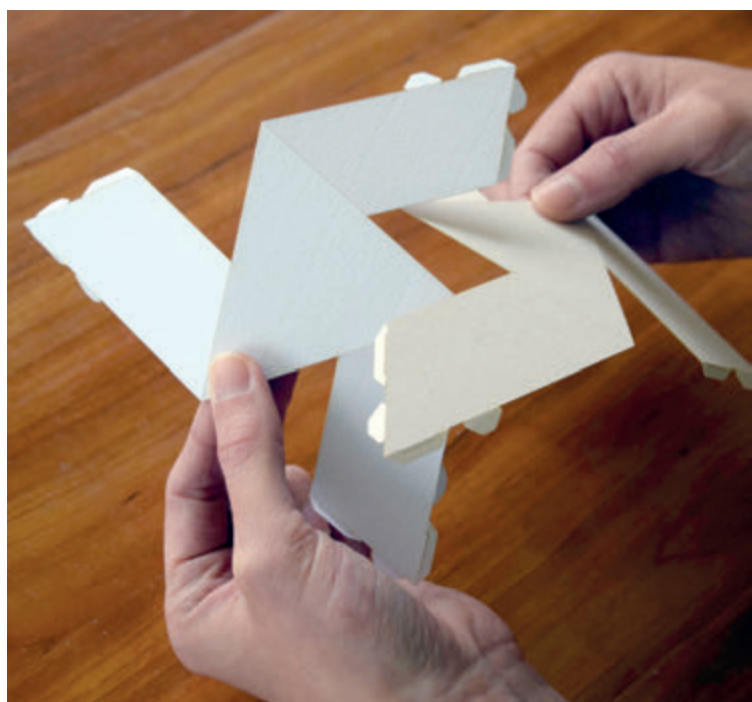


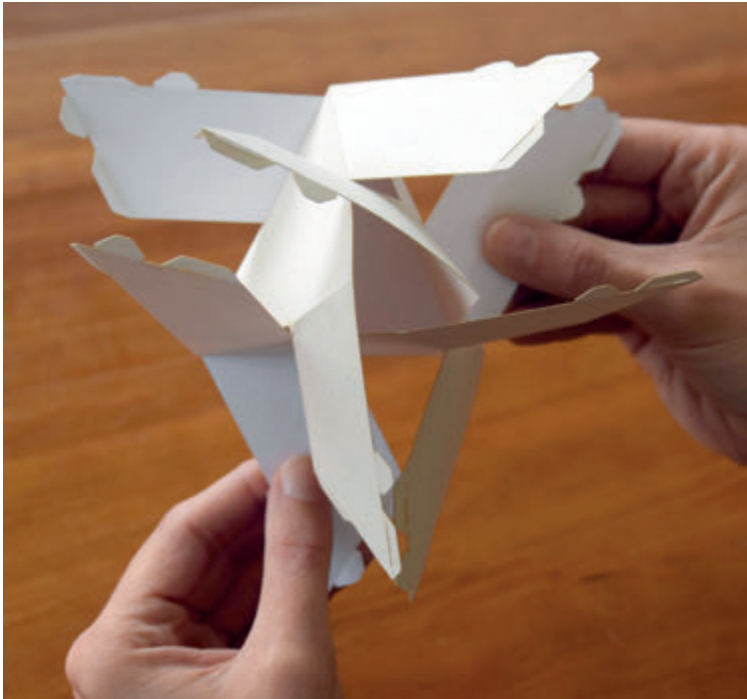
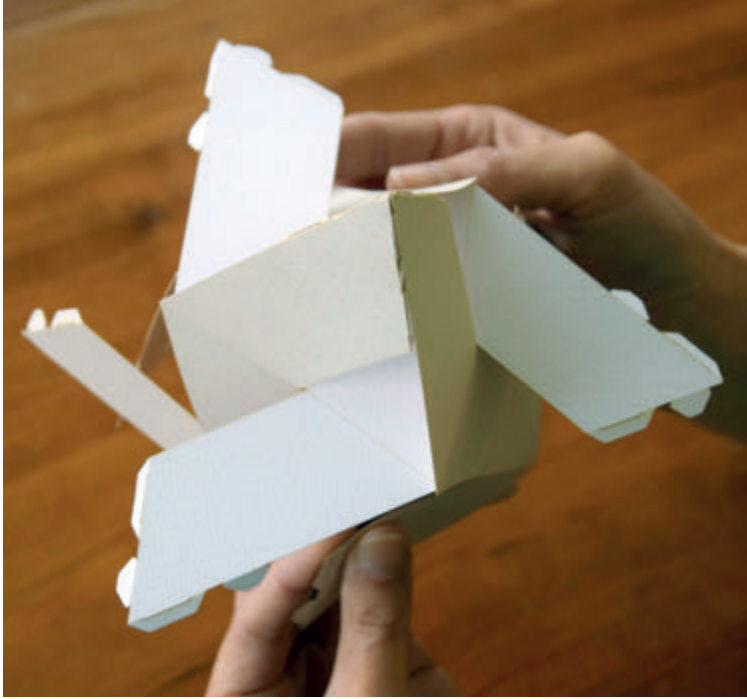
Слика 29: Модел изграђен од троугаоних и квадратних елемената.

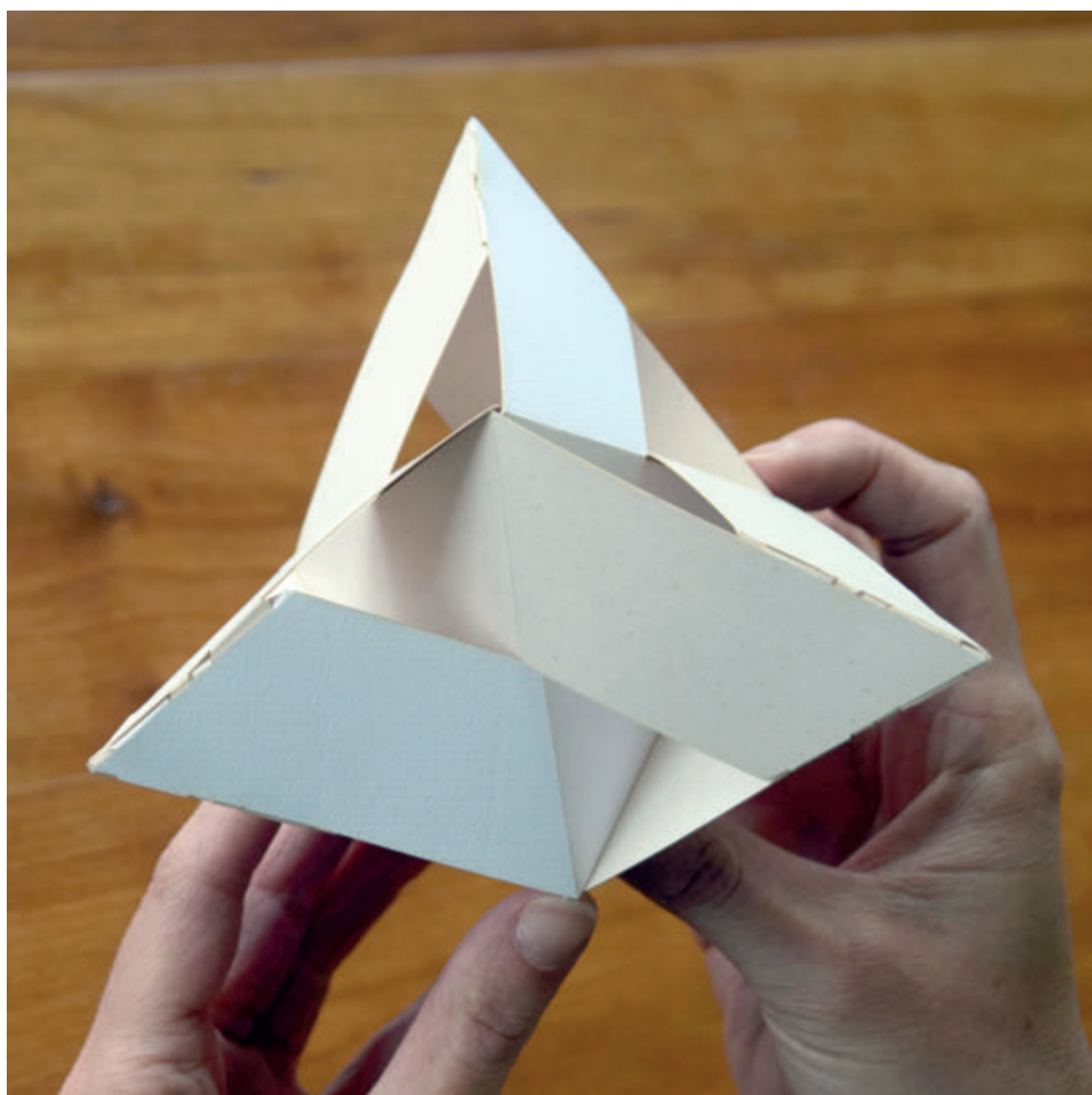
Наравно, могуће су многе варијације на ову тему. Дакле, са само три различита елемента можемо изградити огромну колекцију занимљивих математичких објеката и структура.











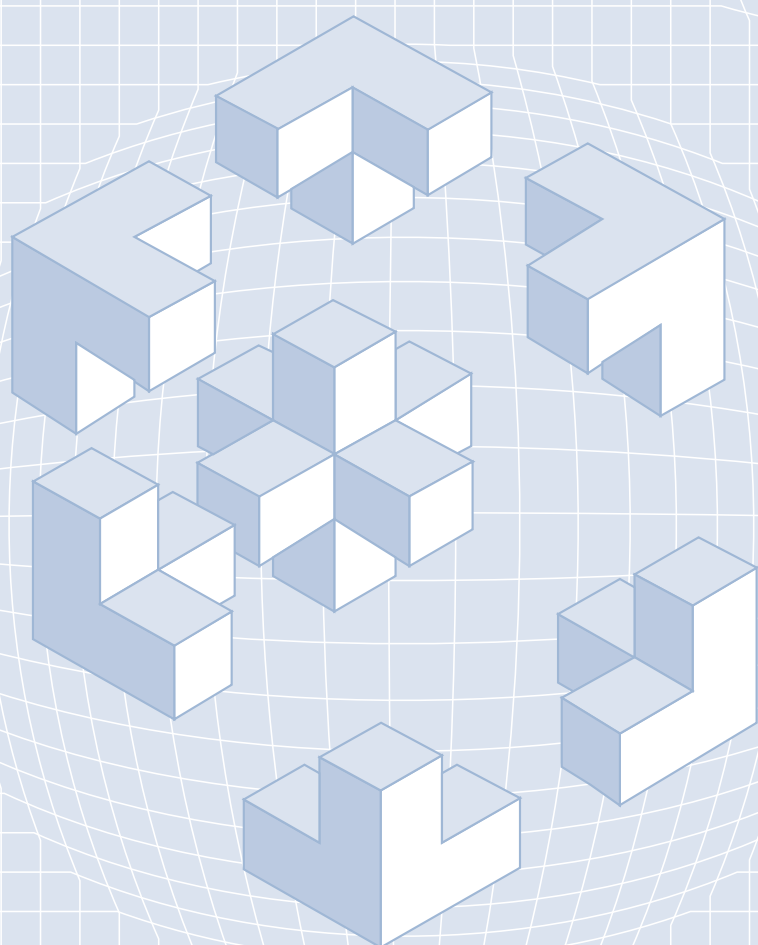


VISUALITY &
MATHEMATICS

EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

Ферхан КИЗИЛТЕПЕ

TWO EXERCISES ON DIMENSION,
SURFACE AND VOLUME
IN MATHEMATICS



ПАПИРНЕ СКУЛПТУРЕ



Ферхан КИЗИЛТЕПЕ: Рођена је 1970. у Истанбулу. Студирала је математику од 1989-1993. на Математичком факултету, Анадолијски универзитет у Ескишехиру, где је дипломирала са дисертацијом из области анализе под називом „Писање компјутерског програма фракталне димензије можданих алфа таласа у програмском језику Ц“. У периоду од 1991 – 1993. стекла је диплому првог степена студија педагогије на Анадолијском универзитету, 2008 – 2011. Магистрирала је на Факултету уметности и дизајна, Јилдиз Технички универзитет (Yıldız Technical University) у Истанбулу са дисертацијом под називом „Размишљања о концепту математичке симетрије као методи у области визуелних уметности и пластике“. Од 2010-2011.

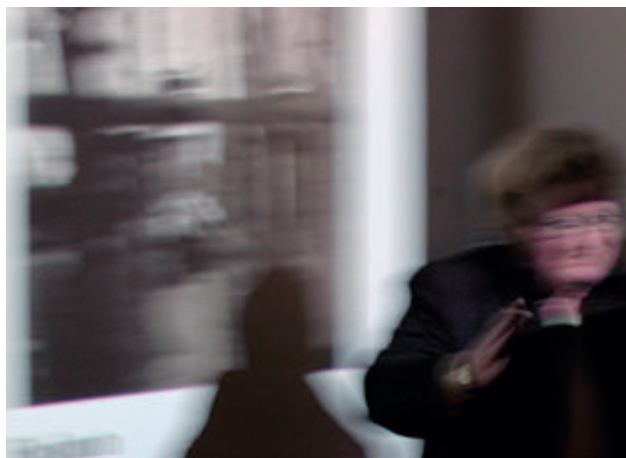
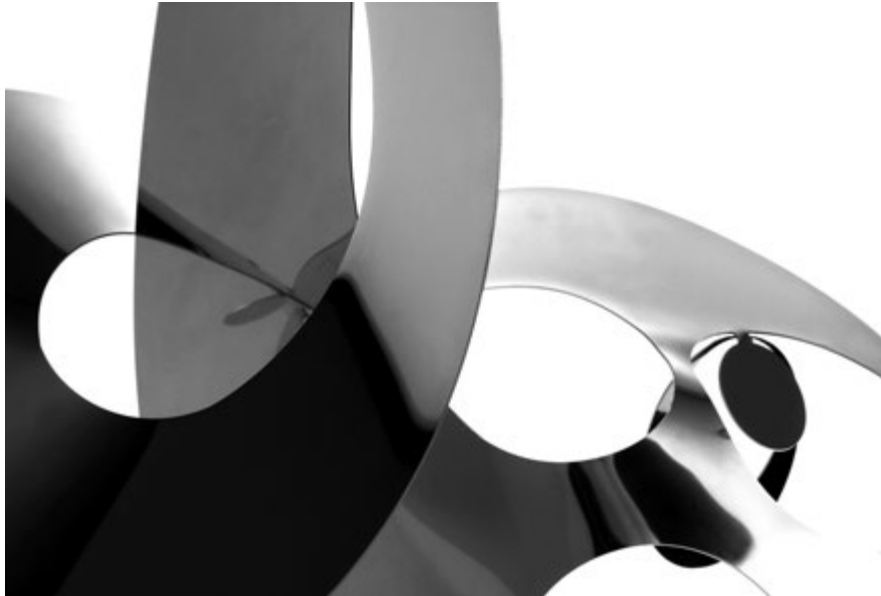
похађала је Уметнички факултет (Kunsthochschule Kassel) на Универзитету Касел у Немачкој. Од 1993. наставила је студије о вези науке и уметности на последипломским студијама на различитим универзитетима, као што су METU, Анадолијски универзитет, Универзитет Хаџетеп (Hacettep), Мимар Синан Универзитет. Такође је на различитим универзитетима радила као гостујући професор. Тренутно је гостујући професор на Факултету за архитектуру и дизајн на Анадолијском универзитету. Била је изабрана као најуспешнија туркиња у 2004. години од стране Турске женске лиге Америке у Њујорку, САД. Ово признање је само једно од многих признања које је добила током своје каријере до данас.

Кизилтепе проучава разне области уметности, углавном скулптуру, мултимедије, заједно уз своје теоријске студије о симетрији и сродним областима. Учесник је већег броја изложби у земљи и иностранству на којима је приказала керамичко/металне скулптуре и дигиталне штампане графике. Реализовала је разне видео студије, извела пуно наступа и направила композиције која спајају све наведене медије. Организовала је више радионица које укључују геометријске теме за различите старосне групе деце. Семинари и конференције такође чине део њене образовне мисије. 2006. је одржала два семинара и две радионице о метности у математици за децу на фестивалу ТУБИТАК (Научно-технолошко истраживачки Савет Турске) под називом „TÜBİTAK, VI. Buluş Şenliği“ у Анкари. 2009. је учествовала на 11. колективној изложби Удружења савремених вајара одржаној у Анкари. 2008. је одржала своју прву међународну самосталну изложбу под називом „Pre-ColliSculp“ у Дворани културног центра у Печују, у Мађарској. Учествовала је на изложбама под називом "Међународне мобилне изложбе", које је одржао MADI (Multichannel Audio Digital Interface), од 2006.

Одабране публикације:

- “A Brief Essay on Jeol- Peter Witkin from Symmetry Perspective”, 15th Generative Art Conference Proceeding GA2012, Italy, 2012. (<http://www.generativeart.com/>)
- “A Brief Review of Frank O. Gehry and the Nationale-Nederlanden Building”, Bridges Coimbra Conference Proceeding 2011 (ISBN: 97809846064203, ISSN: 1099- 6702), USA, 2011, pp. 551- 554.
- “Analyzing the Plane Symmetry of Ottoman Tiles as an Architectural Element between the 15th & 16th Century”, Symmetry: Culture and Science (ISSN 0865- 4824), vol. 21, No.4, Hungary/ Budapest, 2010, pp. 413- 432.
- “Review of a Cinema Film from the Perspective of Symmetry: ‘The Pillow Book’ Bridges Pécs Conference Proceeding 2010 (ISBN: 97809846064203, ISSN: 1099- 6702), USA, 2010, pp. 439- 442.





Керамичке структуре (горе лево), папирне (горе у центру) и металне скулптуре (горе десно), дигитална штампа (средина лево и десно), слика са наступа (доле лево), радионица у TUBİTAK-у (доле десно).

1. Увод

Две вежбе које су у доњем делу текста детаљно описане треба да допринесу интелектуалном развоју у периоду конкретних операција код деце на узрасту од 11 и више година. Вежбе су организоване тако да развијају способности аналитичког, креативног и практичног размишљања у складу са знањем, разумевањем и корацима примењивања у математичком образовању. Такође, ове вежбе ће помоћи у вредновању основних концепата математике код пластичних и визуелних уметности.

Референце:

Bacanlı, H.. Gelişim ve Öğrenme. Анкара: Nobel Yayınları. 2002. Print.

Saban, A.. Çoklu Zekâ Teorisi ve Eğitim. Анкара: Nobel Yayınları. 2002. Print.

Alkan, H., M. Altun. Matematik Öğretimi. Ескишехир: Anadolu Üniversitesi Yayınları. 1998. Print.

2. Од 2Д до 3Д Папирних скулптура

Вежба 1

Ова вежба је замишљена тако да обухвати концепте као што су димензија, површина/раван, запремина/простор. Комбиновањем дводимензионих (2Д) делова (са детаљима приказаним на сликама) ствара се самостојећи тродимензиони (3Д) објекат. Другим речима, прелазећи из 2Д у 3Д створићемо објекат ограничен 2Д површима, који има своју запремину. Тако ће циљна група приметити да се 2Д геометрија може видети само као раванска слика, а да 3Д геометрија може и да се види и опипа. Такође се може дискутовати прелаз из 2Д у 3Д, тј. прелаз са поршина на запремине. Важно је запамтити да су димензије листа папира који се користи за изградњу структура неважне: учесници треба да се усредсреде на његову површину и ништа друго.

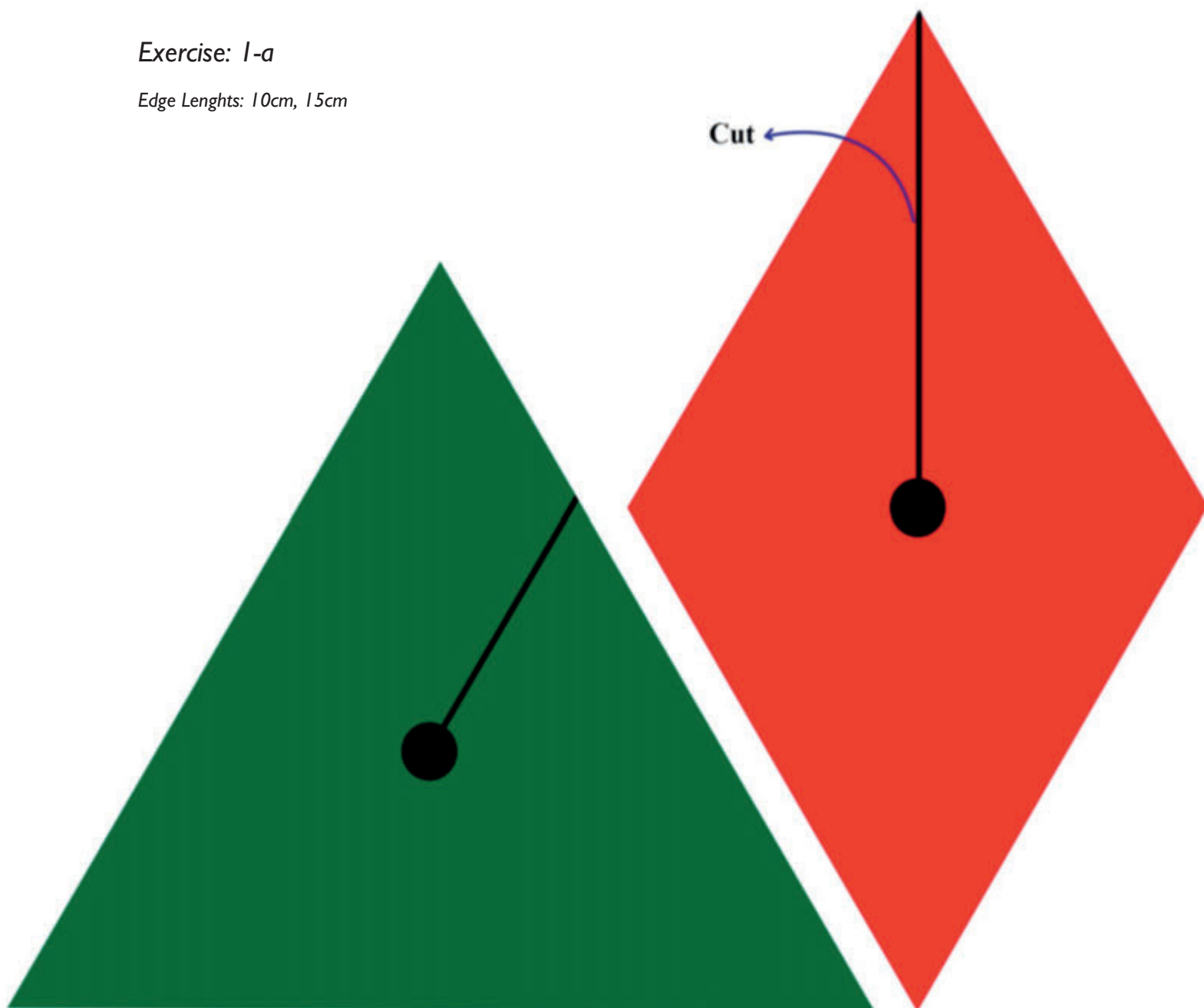
Материјал који се корисити у овој вежби је папир. Папир би требало да буде барем тежине копир-папира. Ако је папир тежак до 200 гр/м² (или више), готови објекти ће бити чвршћи и дуже ће трајати. Препоручује се да

се пробни модели праве од лакшег папира. Такође се препоручује се да се користи папир у боји, а димензије папира који ће се користити у вежби треба да буде минимум 5×5 cm - максимум 20×20 cm (за папире теже од 200 гр, 30×30 cm је оптимално). За млађу децу, ви исеците папир; старија деца треба да буду под надзором док користе маказе да би се избегли инциденти. У свакој вежби, по два комада папира треба спојити на резовима и залепити, по могућству лепком за папир или на други начин по деčјем избору; у овој фази развоја веома је важно да се омогући деци да користе различите начине савијања и спајања. Други комади папира се такође могу додати и ако се додају дизајн ће постајати све сложенији. Облици папира се могу састојати од кругова, елипса, правоугаоника или многоуглова; деца могу да користе облике који желе. Ако је потребно, на крају вежбе, крајњи облик папирне скулптуре може се поправити и дотерати маказама.

Следеће слике у низу се састоје од: 1) узорака папирних форми; 2) исеченог папира већ спремног за коришћење; 3) фотографија довршених папирних скулптура.

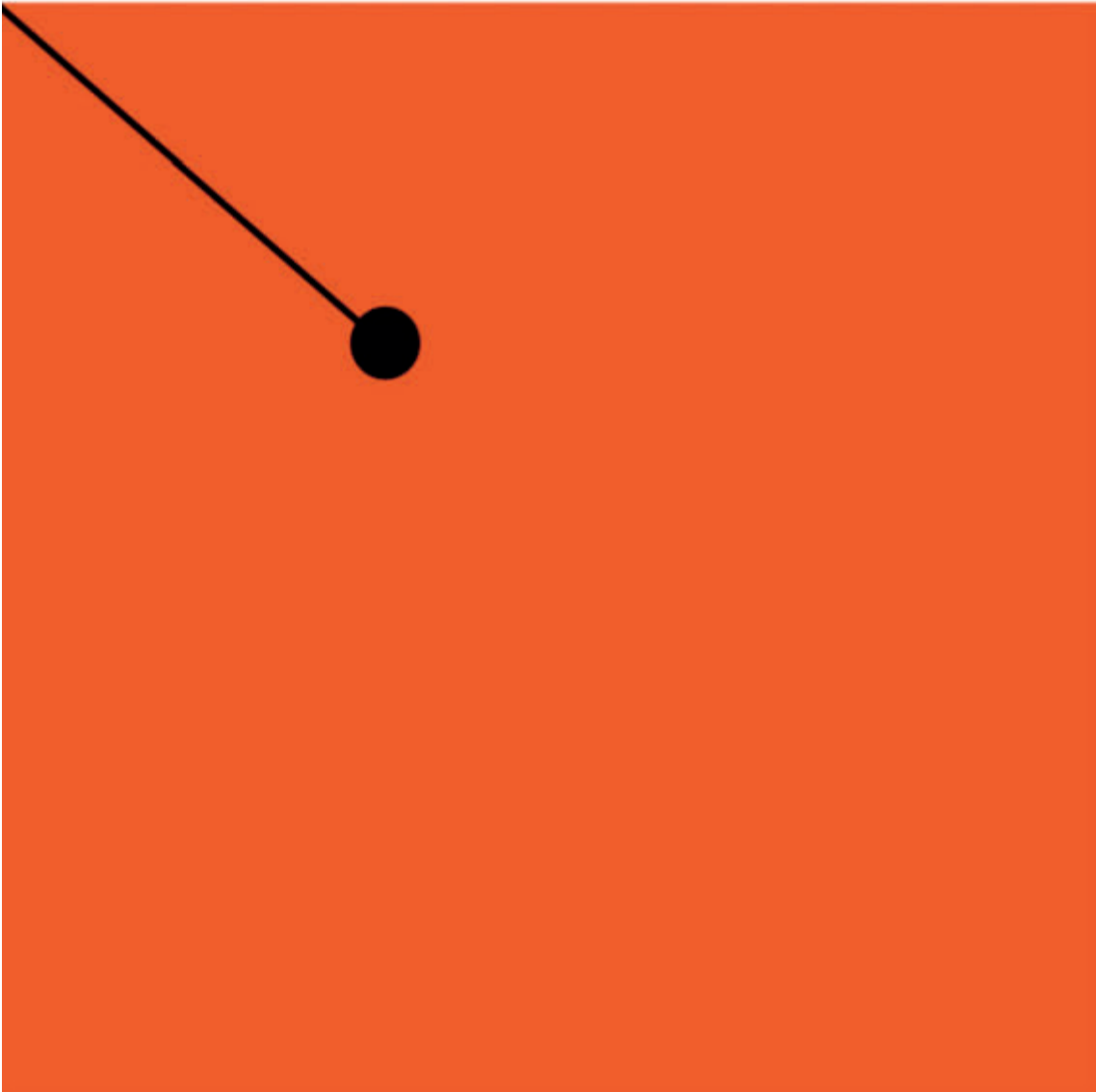
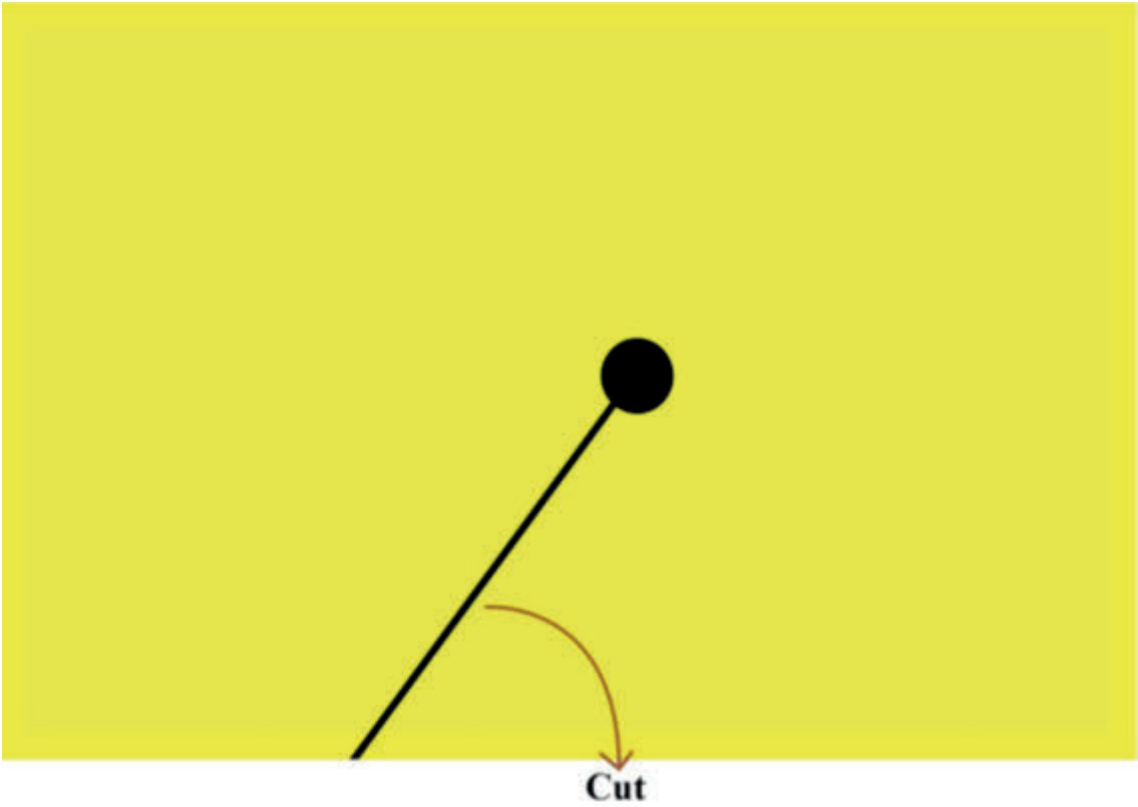
Exercise: I-a

Edge Lengths: 10cm, 15cm

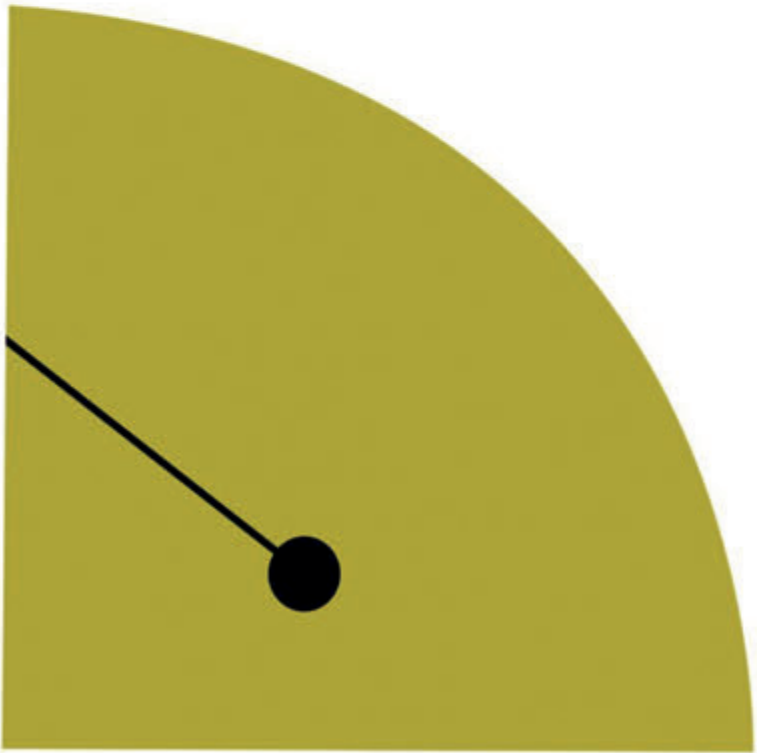
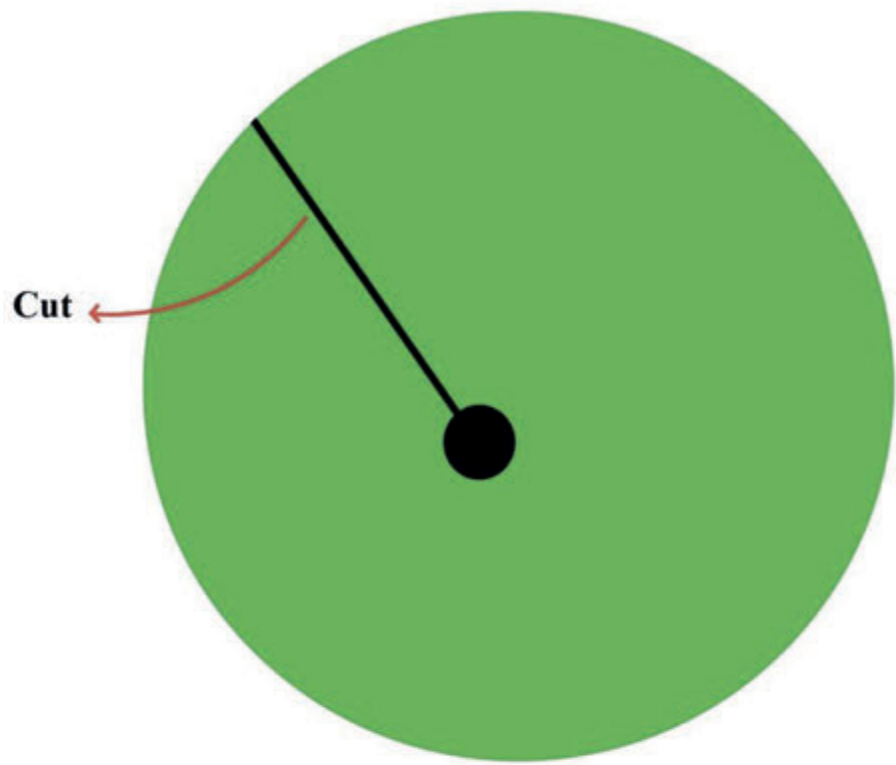


Scale: 1/1

Exercise:
I-b



Exercise: I-c



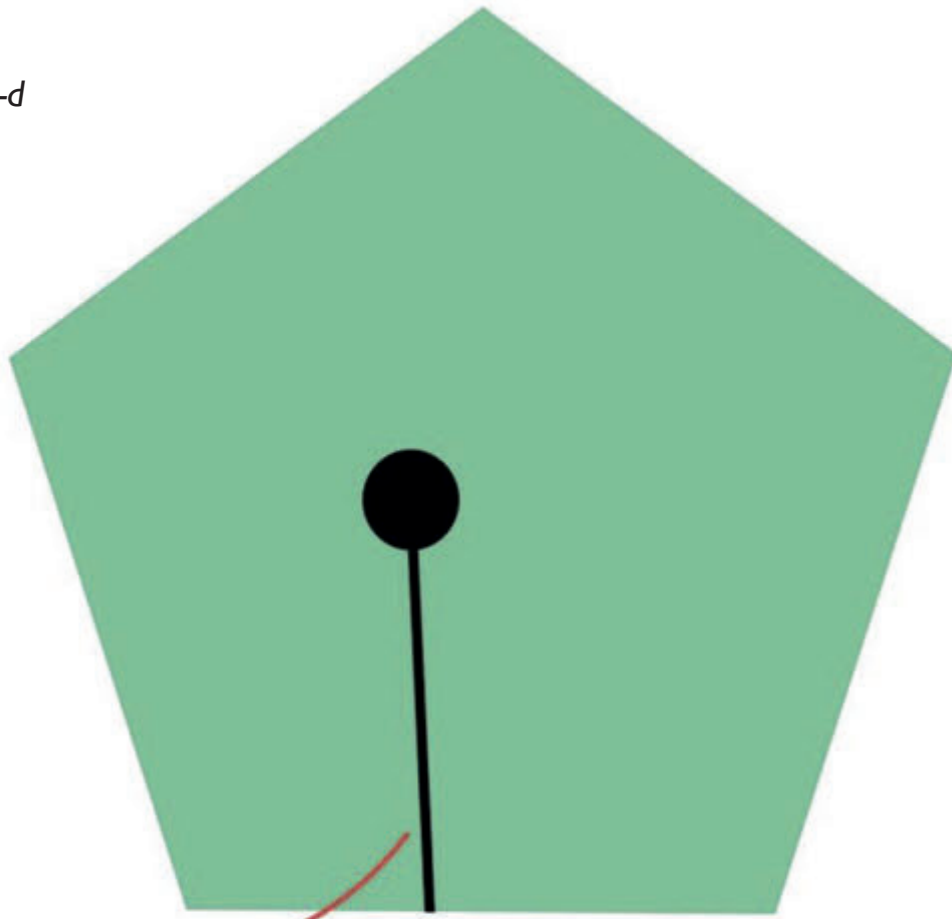
Diameters: 10cm, 20cm

Scale: 1/1

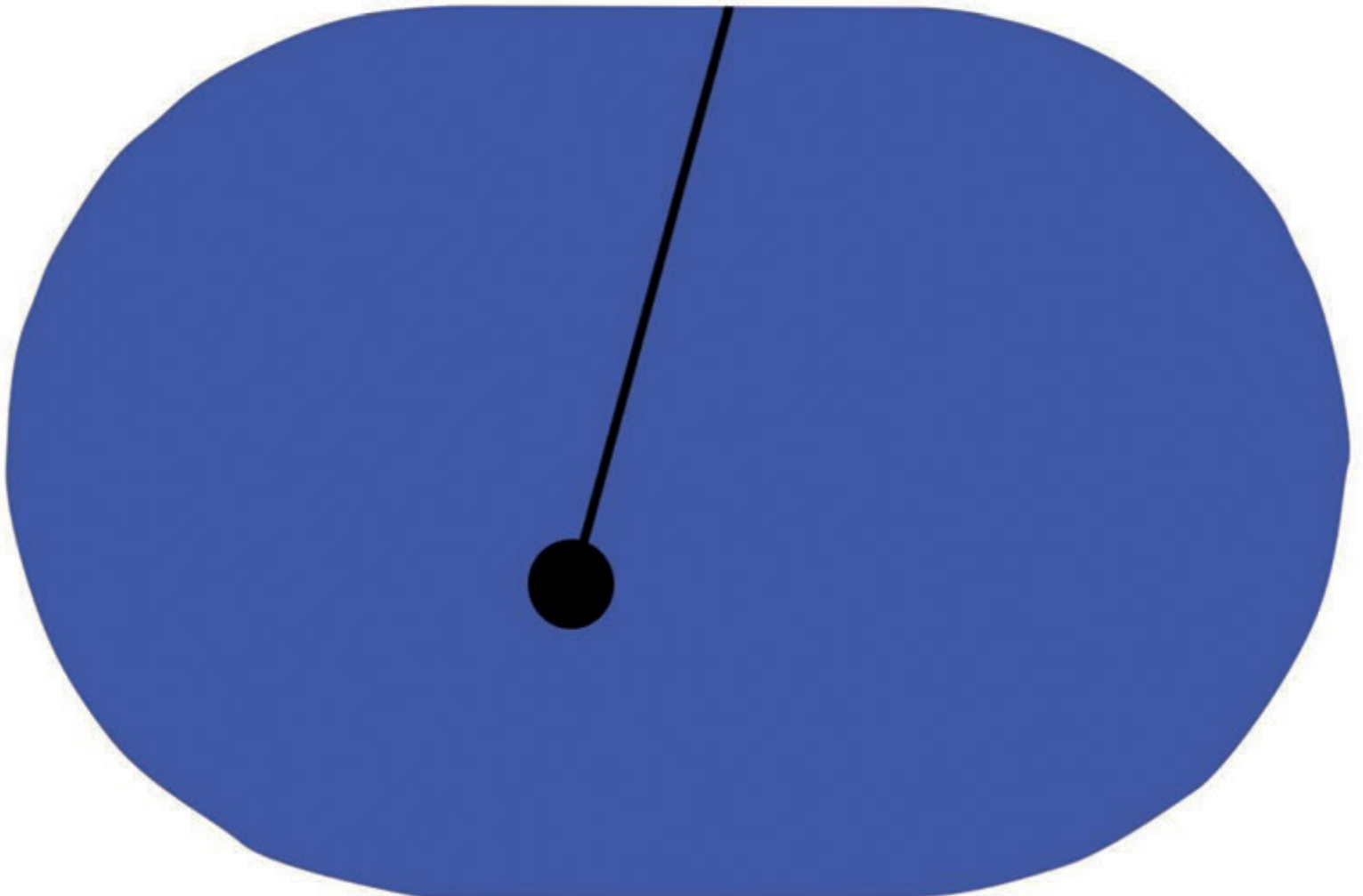
Exercise: I-d

Diameters: 10cm, 20cm

Scale: 1/1



Cut





Пример 1.1



Пример 1.2



Пример 1.3



Пример 1.4

Папирне скулптуре у овим вежбама су направљене од Canson 200-грамског папира у боји.

3. Од нових површина до нових запремина

Вежба 2

Ова вежба која има исте образовне циљеве као и претходна има за циљ стварање нових површина и нових запремина од основних правилних 3Д геометријских тела и истраживање њихових особина. Ово ће помоћи развоју дискретних способности размишљања и креативности: док деца буду стварала нове површине и запремине, повећаваће се и њихово разумевање за дискретну скулптуру. Дакле, као резултат ове вежбе, развијаће се способност перцепције учесника о запремини обојених папирних скулптура.

Основни материјал за ову вежбу је папир. У првом делу вежбе користиће се бели папир, а у другом делу ће се користити папири у боји. Папир би требало у пречнику да буде барем у величини копир-папира (А4). Ако је папир тежак 200 гр/м^2 (или више), готова фигура ће бити трајнија. Препоручује се да се пробни модели праве од лакшег папира. Препоручује се да се користи папир у боји, а димензије папира који ће се користити у вежби треба да буду минимум $8 \times 8 \text{ cm}$ - максимум $20 \times 20 \text{ cm}$ (за папире теже од 200 гр $30 \times 30 \text{ cm}$ је идеално). Папири у боји ће се користити за прекривање белог папира, односно конструкцију вишебојних модела. Стога се саветује да се користи папир у боји грамаже од најмање $60\text{--}110 \text{ гр}$ за покривање. За млађу децу, ви исеците папир; старија деца треба да буду под надзором док користе маказе да би се избегли инциденти.

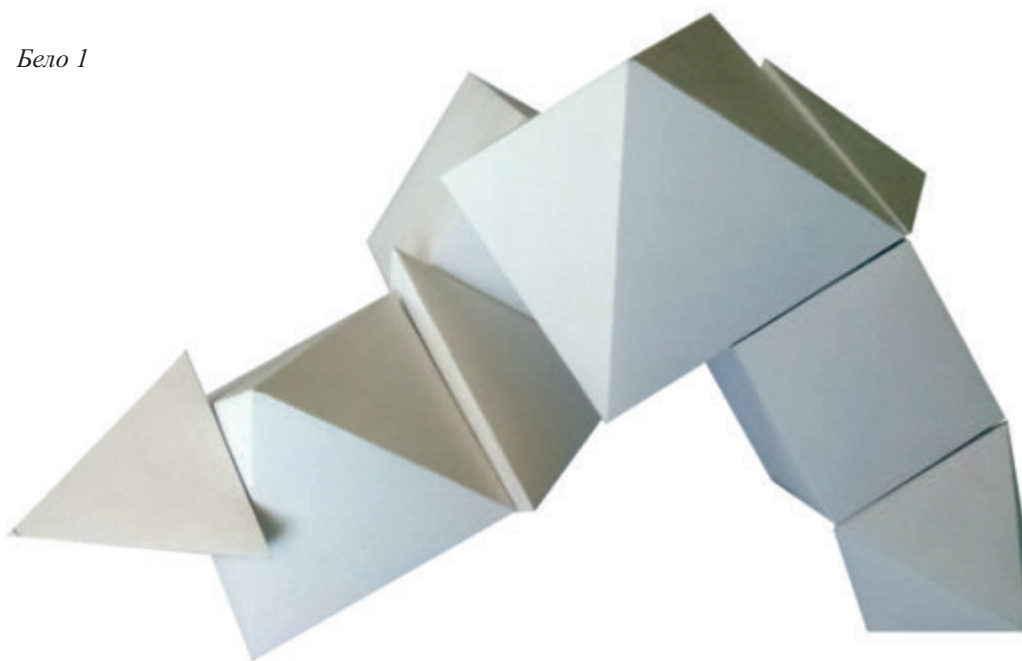
У првом делу вежбе конструишите полиедре од белог папира. Можете направити различите основне елементе: праве или косе призме, пирамиде или октаедар (који има осам пљосни), додекаедар (који има дванаест пљосни), икосаедар (који има двадесет пљосни), па одатле потичу називи ових правилних полиедара, и сл. У овој вежби би требало да се користе најмање два полиедра. Од белог папира треба исећи раванске мреже изабраних полиедара, а онда ивице мрежа треба савити и залепити једну за другу. Припремљене полиедре треба слепити

по њиховим изабраним пљоснима, или, да би се створио утисак да један полиедар продире кроз други треба их засећи на различитим угловима, а затим спојити. На овај начин, интегрисањем полазних полиедара добиће се нови. Ова вежба ће бити сложенија када се покуша са вишеструким комбинацијама полиедара и то ће помоћи да ученици реше много теже задатке. Основни правилни полиедри су доле нацртани као раванске мреже од којих, након сечења и слепљивања ивица, добијате 3Д полиедре.

Када се све или само неке пљосни белог полиедра облепе обојеним папиром добијамо нову папирну скулптуру у боји.

Следеће слике у низу састоје се од: 1) нових полиедара направљених од белог папира; 2) примера папирних скулптура које су добијене прекривањем пљосни беле скулптуре папиром у боји; 3) раванских мрежа основних правилних полиедара.

Бело 1

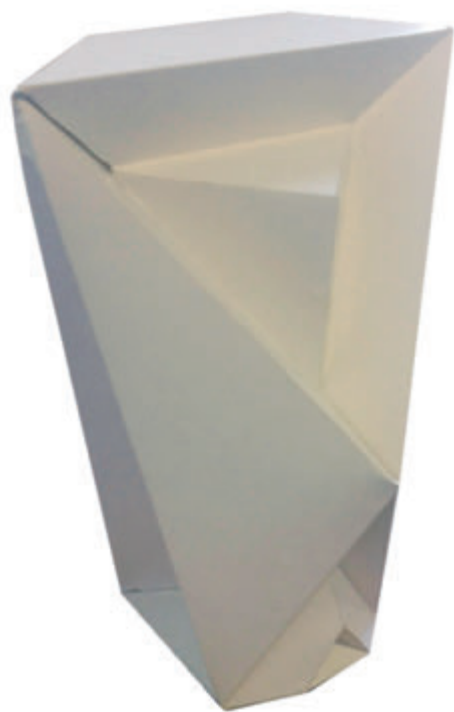


Бело 2



Бело 3

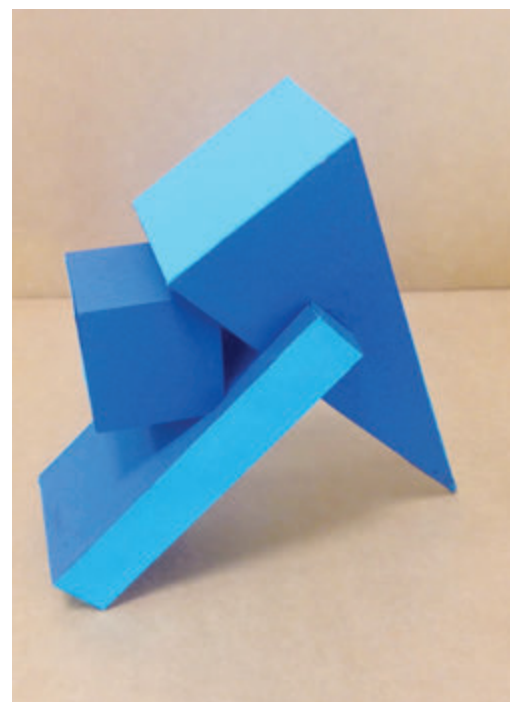




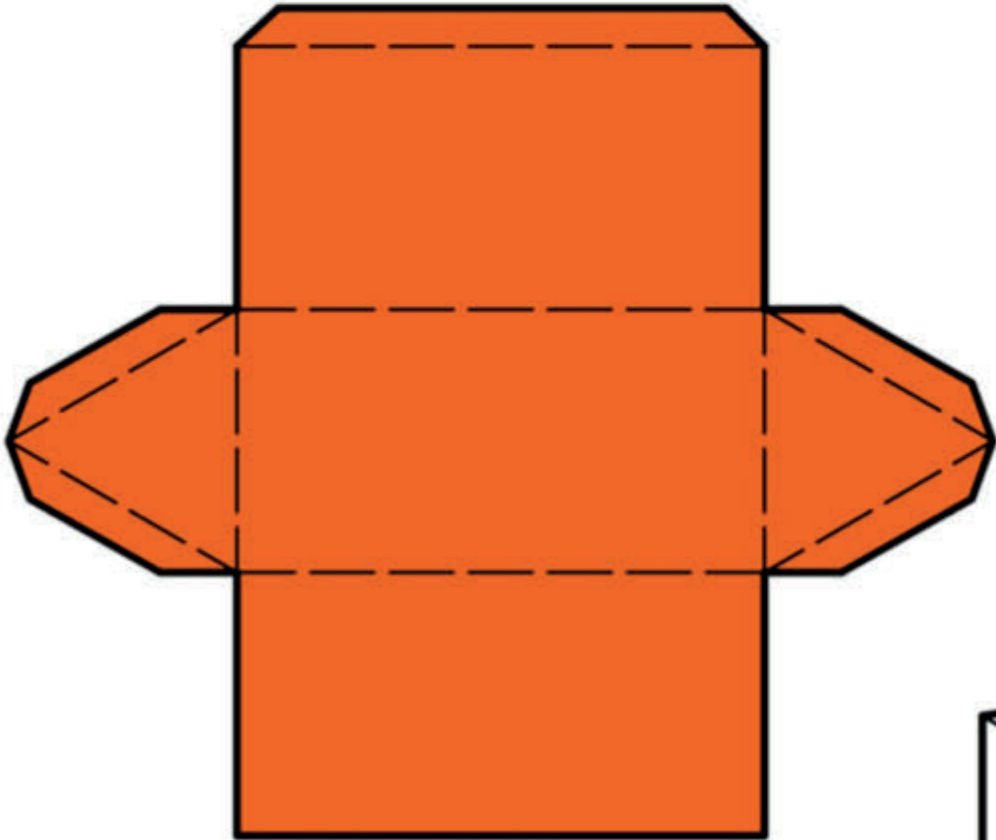
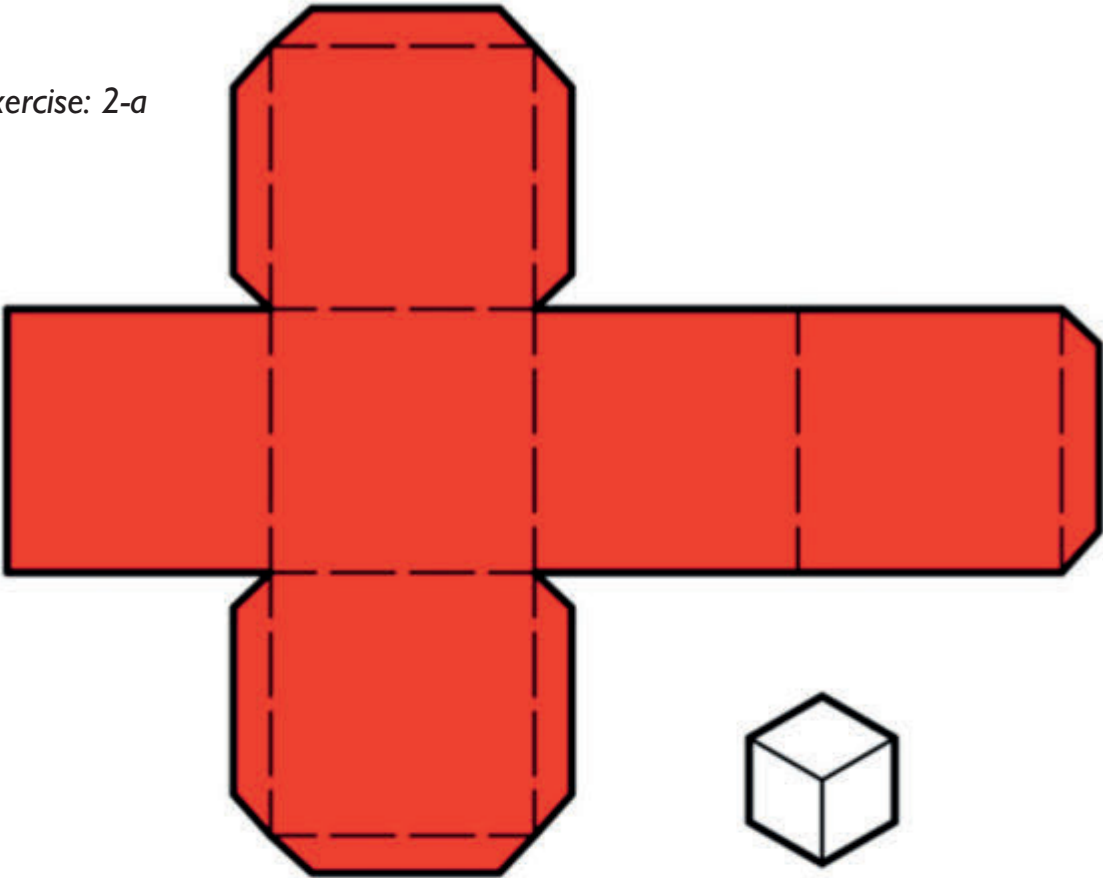
Бело 4
Бело 5
Бело 6



У боји 1, У боји 2, У боји 3



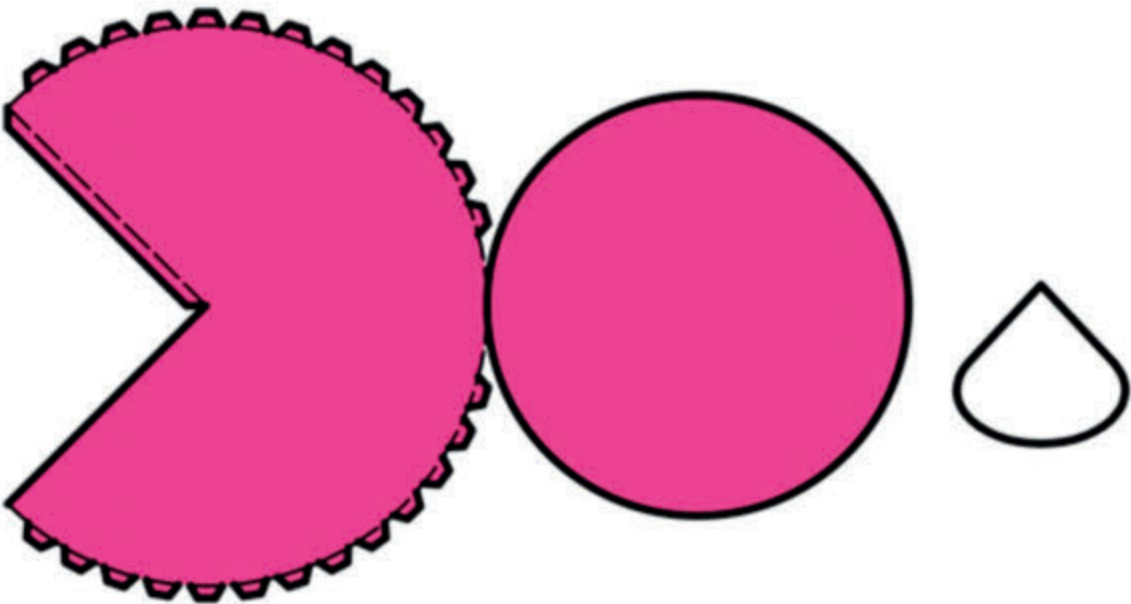
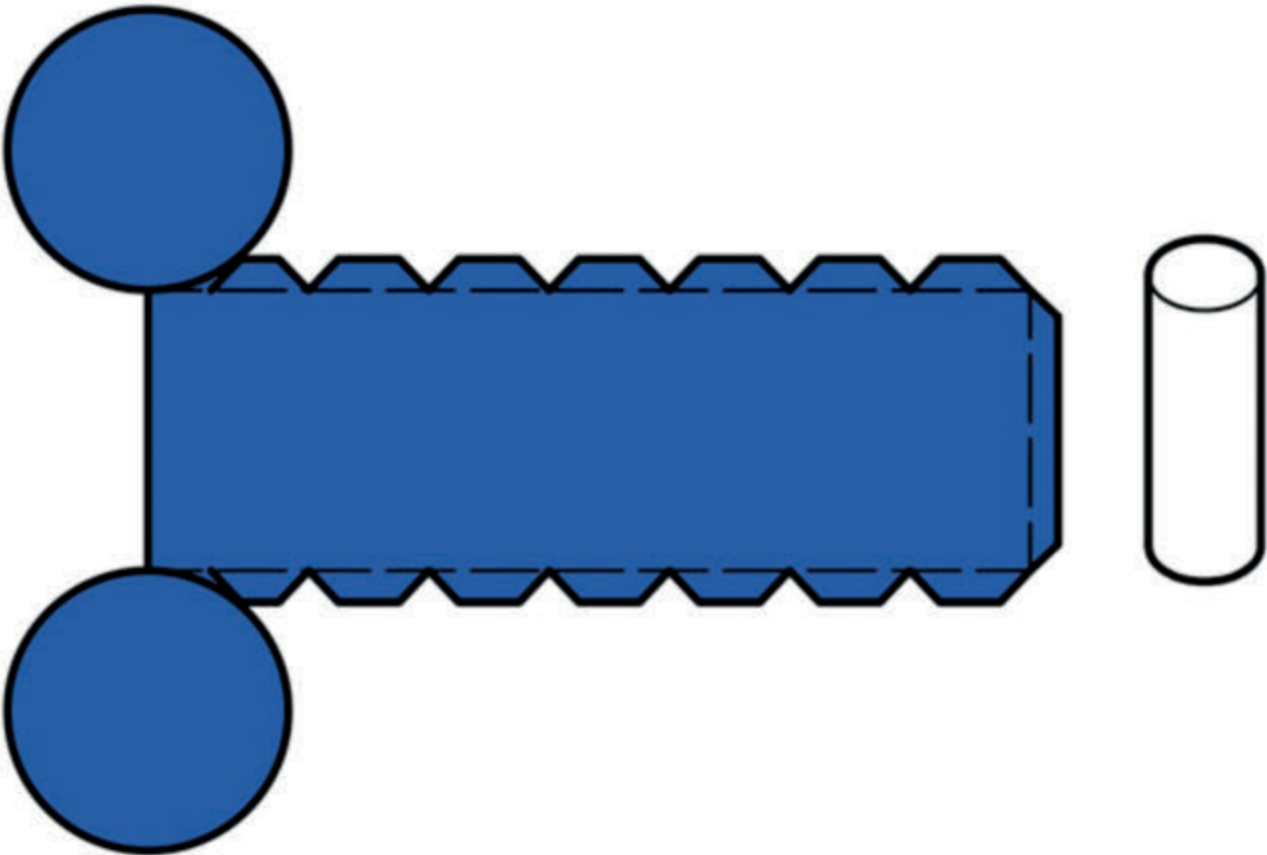
Exercise: 2-a



Edge Lengths: 10cm, 20cm

Scale: 1/3

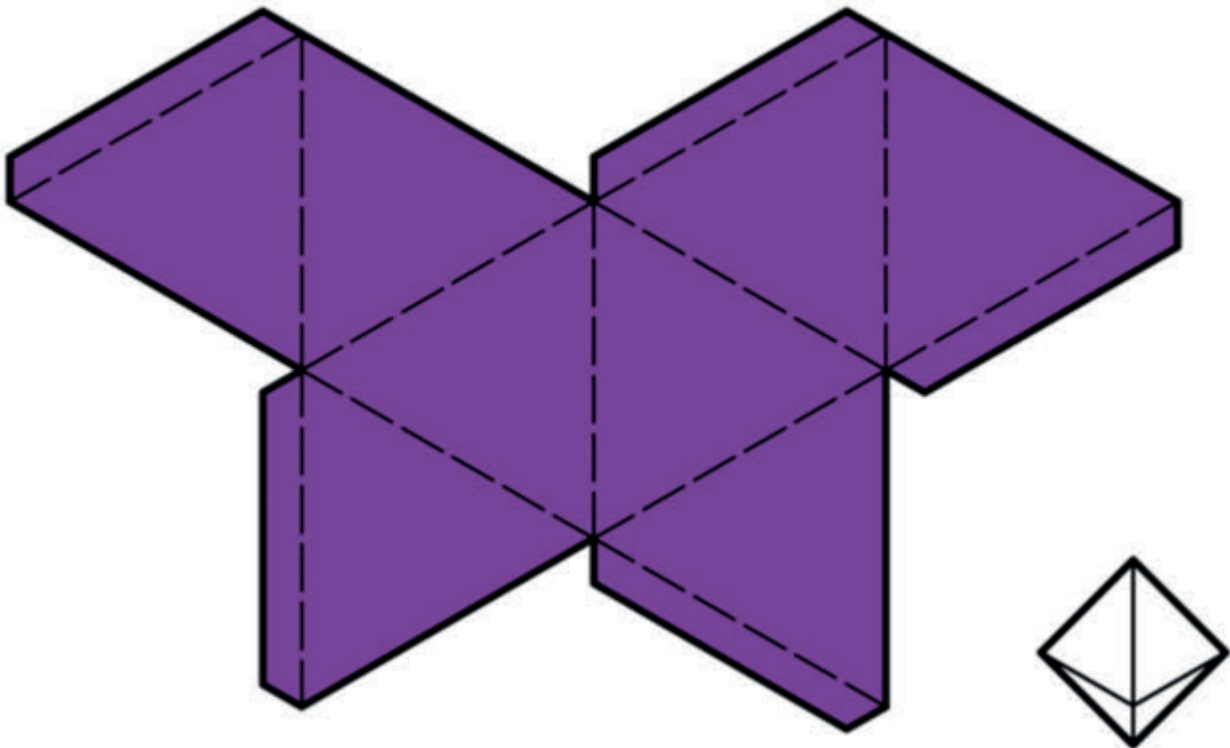
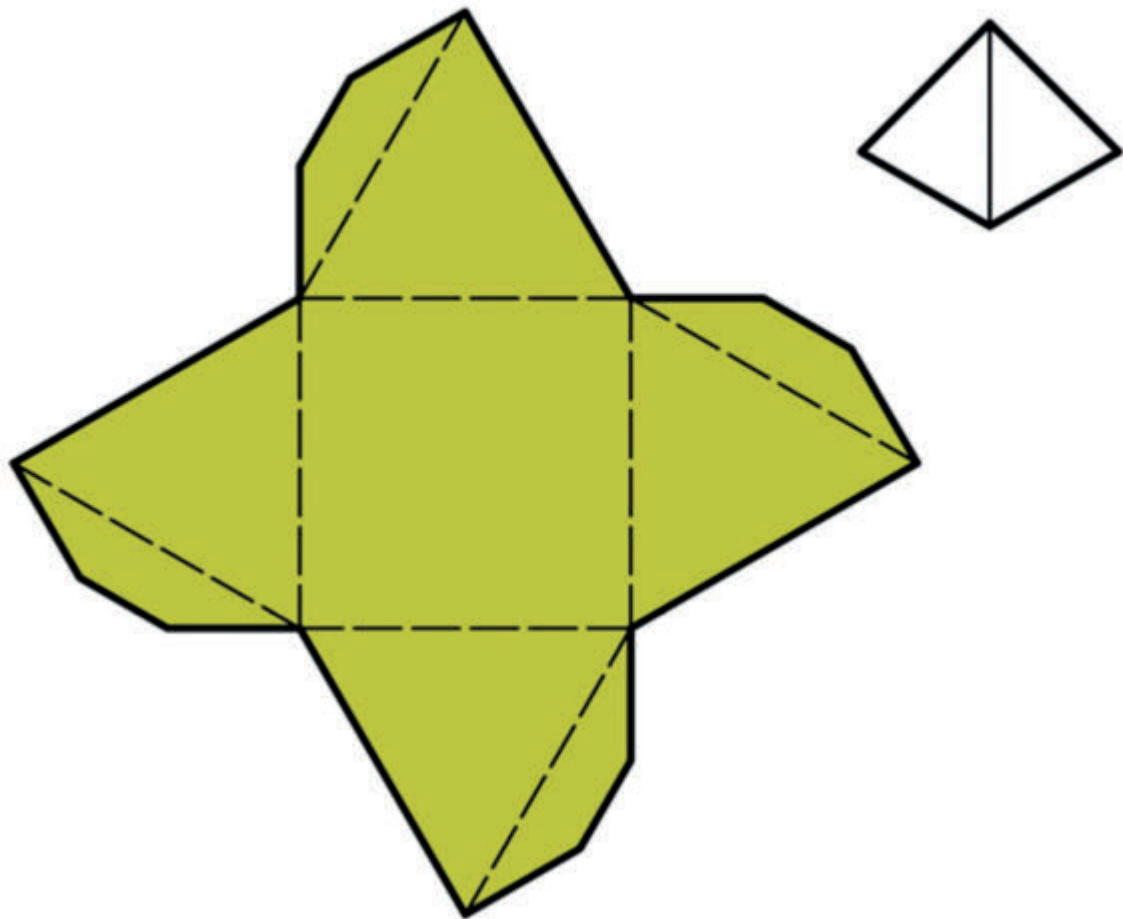
Exercise: 2-b



Diameters: 20cm, 15cm, 10cm

Scale: 1/3

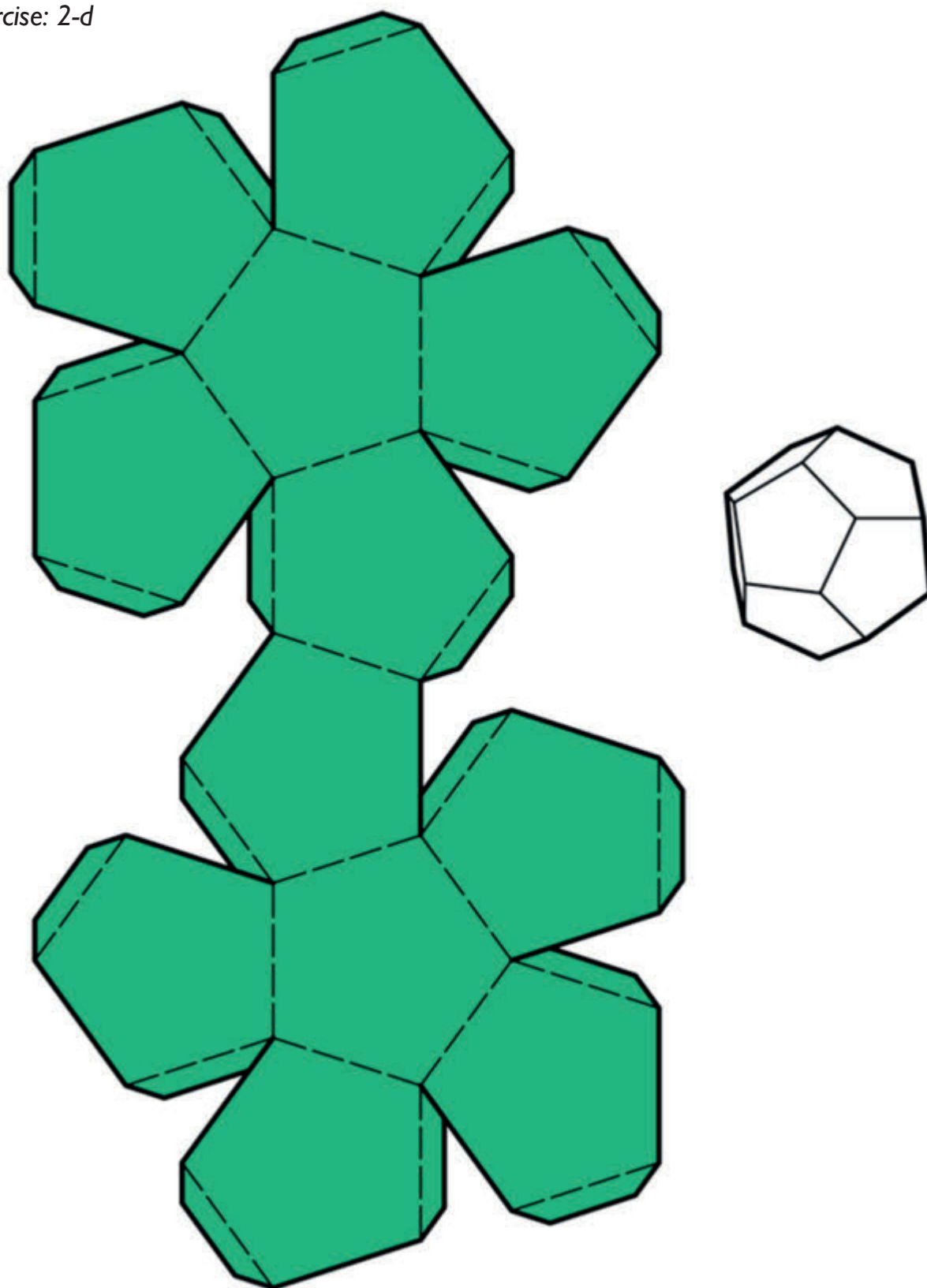
Exercise: 2-c



Edge Lengths: 17cm

Scale: 1/4

Exercise: 2-d



Edge Lengths: 12cm
Diameters: 10cm

Scale: 1/4

Захваљујем се на доприносу филологу Мелике Цакан (Melike Çakan) и индустријском дизајнеру Рамазану Сејхану (Ramazan Seyhan).



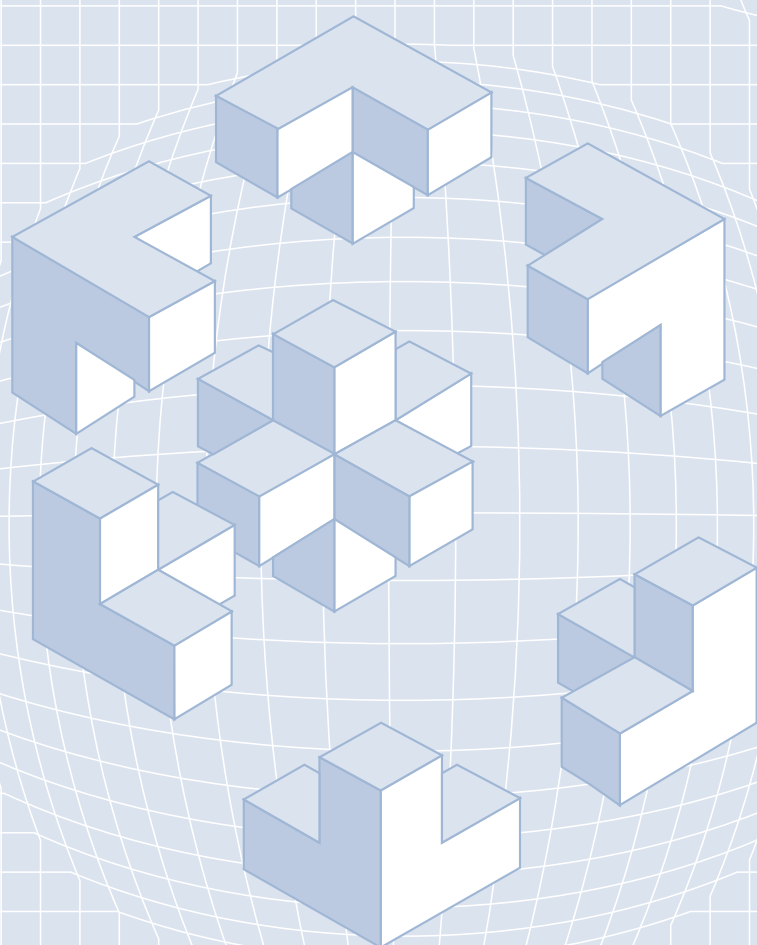
VISUALITY &
MATHEMATICS

EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

Кристина Бурчик
Војћех Бурчик

Математичке авантуре у оригамију

ПАПИРНЕ СКУЛПТУРЕ



Кристина Бурчик - Војћех Бурчик: Дипломирали су математику на Јагелонском (Jagiellonian) универзитету у Кракову, у Пољској, 1983. Године. Војћех, поред тога, има докторат са АГХ Универзитета за науку и технологију у Кракову. Кристина је наставник математике са више од 20 година искуства, као и оригами уметник. Њено математичко образовање је довело до развоја интересовања о геометријским моделима. Од времена студија је фасцинирана математичком структуром оригами модела и процесом савијања, као и везом између оригамија и математике. Такође се интересује за примену оригамија у образовању, посебно подучавајући математику кроз оригами. Војћех је више од 20 година био финансијски директор једне велику међународну компанију која се бави производњом.



Контакт подаци:

Кристина Бурчик (Krystyna Burczyk)	burczyk@mail.zetosa.com.pl
Војћех Бурчик (Wojtek Burczyk)	woj.burczyk@gmail.com
Веб страница:	www.origami.edu.pl

Наше интересовање за оригами

Кристина и Војћех су почели да се интересују за оригами 1995. године, а он је сада постао велики део њихових живота. Излагали су своје радове на неколико конгреса и изложби, у Пољској и иностранству (Мађарска, Италија, Велика Британија, САД, Шпанија, Шведска, Немачка, Румунија, Швајцарска, Француска, Холандија, Сингапур). Били су позвани да учествују на великој међународној изложби оригамија „Мајстори оригамија“ (Masters of Origami) одржаној у Салцбургу 2005. године и у Хамбургу 2007. године, и изложби „Савијен папир: бескрајне могућности“ (Folded Paper: Infinite Possibilities) која је кренула из Лос Анђелеса 2012. године, и која ће обићи САД до 2016. године. Кристинини радови су били изложени на конференцијама „Мостови“ (Bridges Conferences), на којима су приказана дела која повезују математику, музику, уметност, архитектуру и културу, у Печују (Мађарска, 2010), Коимбри (Португал, 2011), Еншедеу (Холандија, 2013) и Сеул (Кореја, 2013). Њени радови су уврштени у „Енциклопедију оригамија“ Ника Робинсона (Nick Robinson: The Encyclopedia of Origami) Кристина и Војћех су представили теоријске и образовне аспекте оригамија на конференцијама „Оригами у науци, математици и образовању“ (Origami Science Math and Education (OSME)) 2001, 2006, 2011 и 2014. године, на конференцијама „Настава савијања папира“ (Didaktik des Papierfalten) 2006. - 2013. године и на конференцији „Мостови“ 2011.

1 Оригами и математика

Суштина оригамија је савијање папира дуж правих линија. Такве линије нас директно воде у свет геометрије. Обичан лист папира може постати моћан математички алат, Математички проблеми који произилазе из оригамија су животни задаци, за разлику од већине задатака са којима се студенти сусрећу у класичној настави. Активности које следе су засноване на једноставном савијању и не захтевају никакво претходно искуство у оригамију или посебне вештине. На дијаграмима је коришћена стандардна нотација. Уколико се појави неки проблем, видети кратко објашњење симбола на крају прве активности.

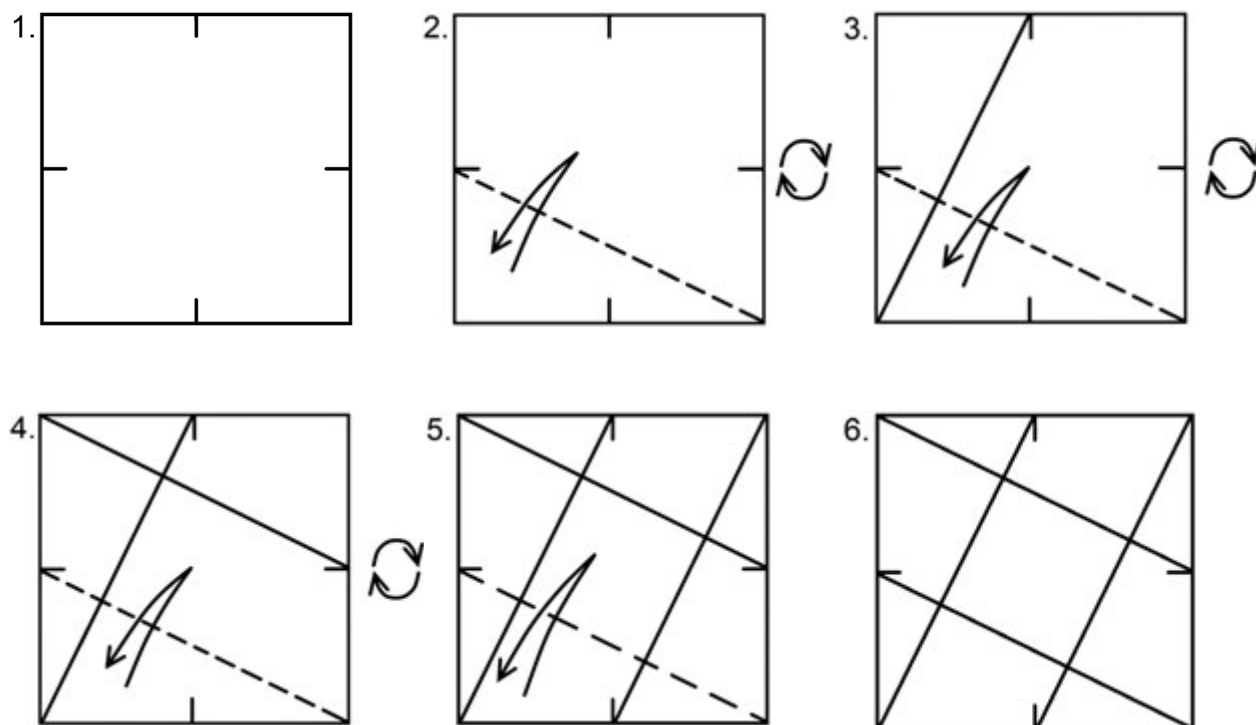
Обе активности представљају оригиналне идеје које је развила Кристина. Свака од њих почиње са детаљним описом процеса савијања који води ка моделу. Опису следи низ питања која истражују математичке проблеме који природно произилазе из процеса савијања. Решења проблема отварају нове правце за истраживање различитих варијација и на крају воде ка уметности.

2 Поделите квадрат на 9 делова

Почните са једним папиром у облику квадрата. За то може послужити обичан фотокопир папир, али папир са различито обојеним странама даје боље резултате.

Означите средишта свих страна квадрата. Затим повежите средишта и темена квадрата са четири линије тако да квадрат буде подељен на 9 делова (Sundara Row¹ 1905).

Конструкција²



Питања за радознале

- Који многоуглови настају поделом квадрата?³
- Колики део великог квадрата (листа папира) чини четвороугао у центру?
- Колика је удаљеност од темена централног четвороугла до темена великог квадрата?
- Да ли је предложени шаблон једино решење које дели квадрат на 9 делова у складу са условима који су наведени у опису конструкције?

¹ Row Sundara T., 1966, Геометријске вежбе у савијању папира, Довер паблицејшнс, Њујорк (репринт издање 1905) (*Geometric Exercises in Paper Folding*, Dover Publications, New York (reprint of 1905 edition))

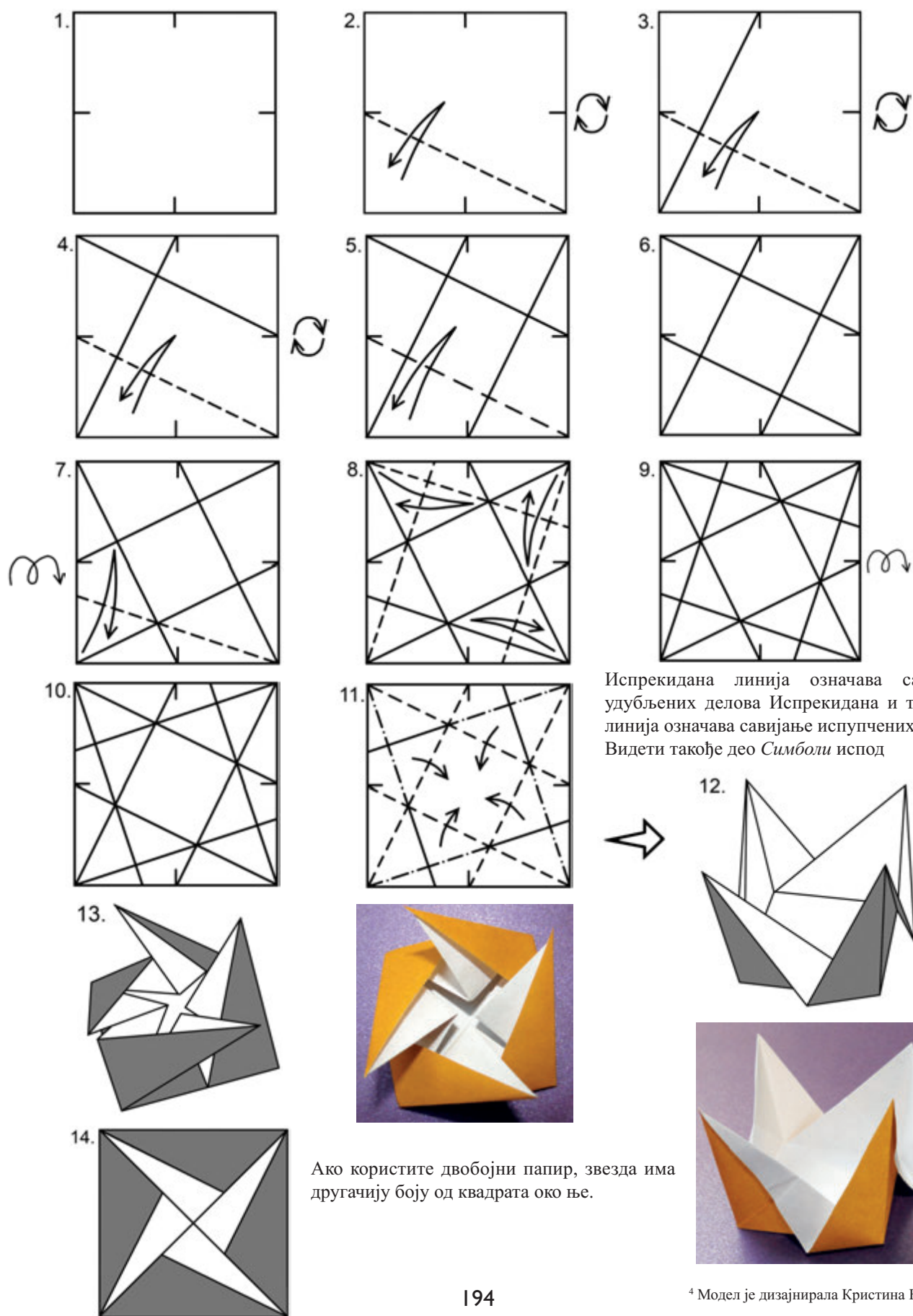
² Посматрајте како се крећу темена квадрата и анализирајте њихове нове позиције. То је драгоцену искуство приликом склапања.

³ Можете ли да одговорите на питање у вези са природом многоугла у средини квадрата, након пажљивог посматрања врста насталих многоуглова, њиховог међусобно симетричног распореда и њихових унутрашњих углова. Ове особине је лакше приметити када поставите два савијена листа папира један уз други.



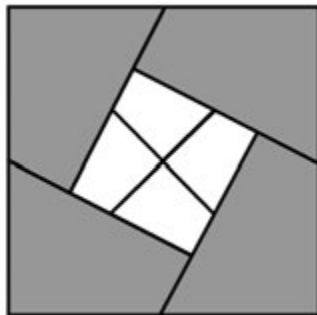
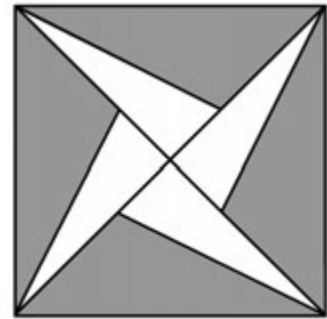
3 Звезда у квадрату

Прво пресавијте линије на квадратном листу папира као што је приказано испод (кораца 1-10). Посматрајте знаке ротирања и знаке за окретање папира на другу страну (за објашњење знакова видети крај овог поглавља). Онда формирајте звезду⁴ (различите линије показују различите правце савијања).

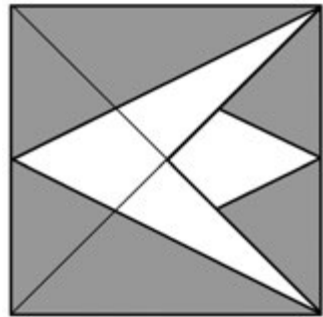
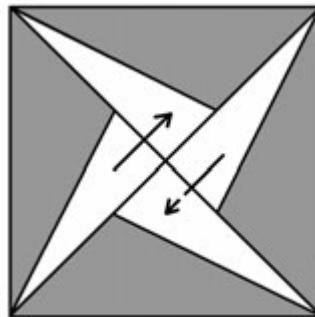
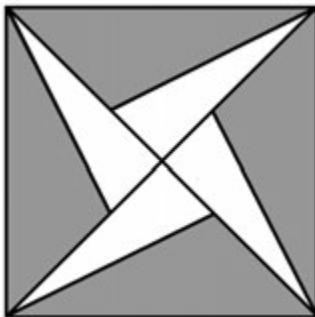
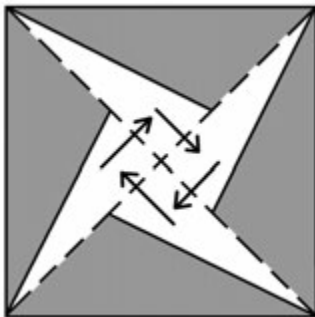


Питања за радознале

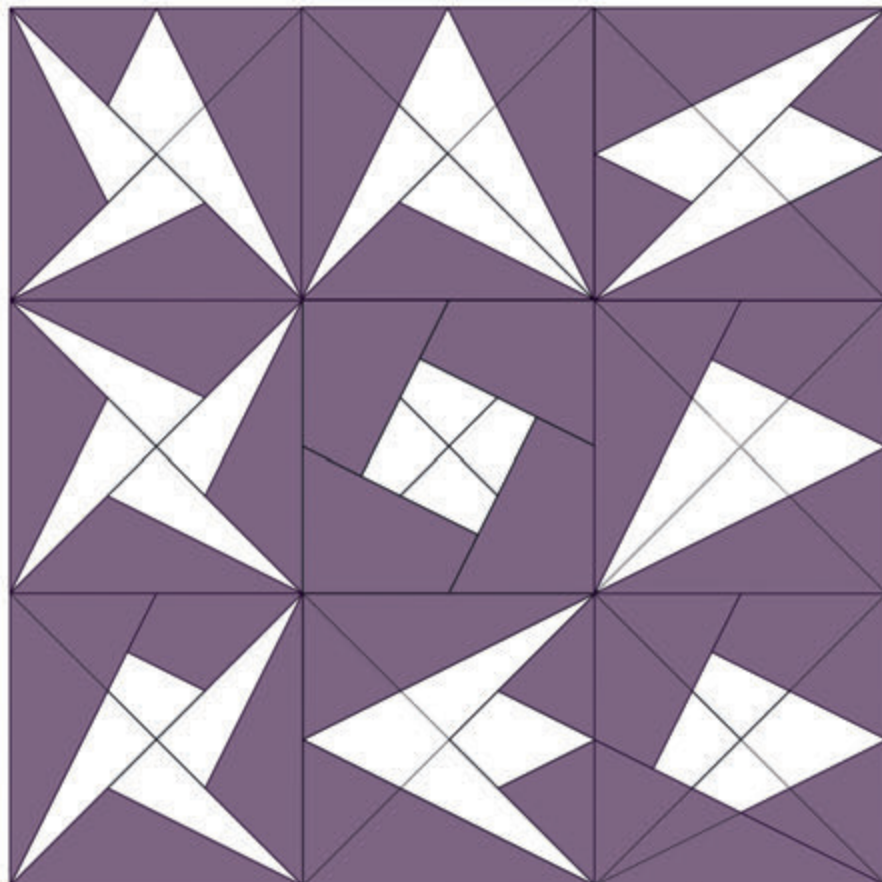
- Колики део квадрата чини звезда (колика је површина звезде у односу на квадратну плочицу)?
- Угурајте врхове звезде у наборе попут џепова иза њих. Колики део плочице чини мали квадрат у унутрашњости (квадрат који се састоји од четири четвороугла)?



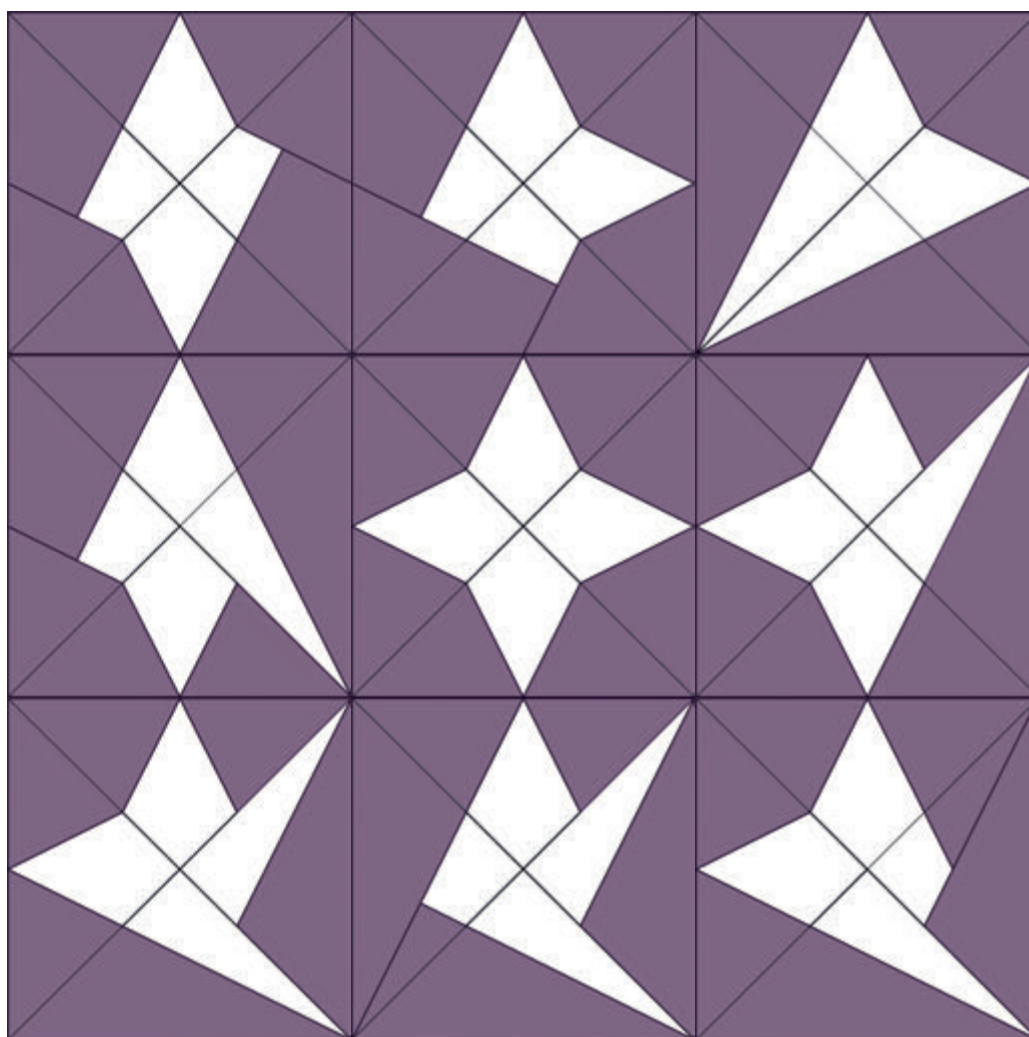
- Да ли је могуће преуредити крилца звезде на неколико начина: преклопити их, преклопити иза другог крилца или угурати у набор попут џепа. Које шаблоне на плочици можете да креирате (без икаквих додатних линија савијања)?



- Направите плочице са следећим шаблонима (без увођења икаквих додатних линија савијања).



- Направите плочице према следећим шаблонима (без икаквих додатних линија савијања).

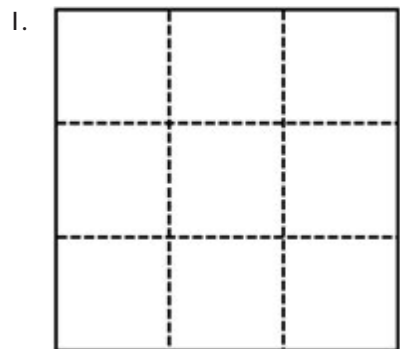


4 Змајево јаје (Dragon egg)

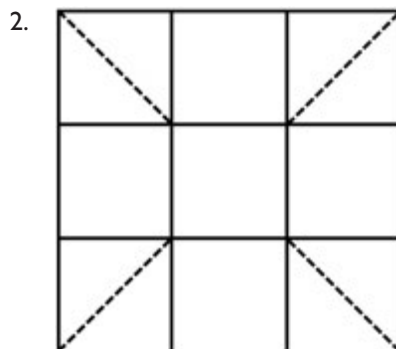
Змајево јаје је једноставан модел који је дизајнирала Кристина Бурчик 2009. године. Он је врло ефикасан – одговарајућа величина папира доводи до прилично великог коначног облика. Потребно је 12 комада папира у облику квадрата, стандардни 80 г/м². Можете користити фотокопир папир у боји. Најбоља величина папира је да страна квадрата буде 10 до 15 цм.



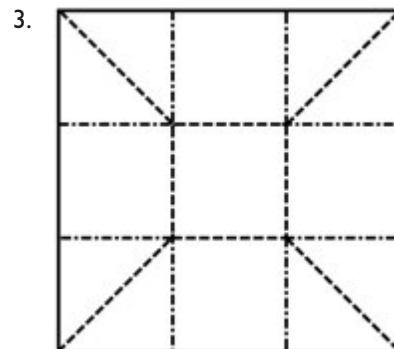
Модул



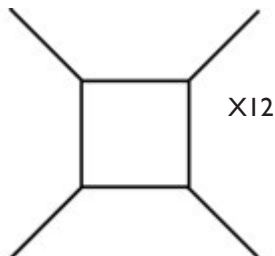
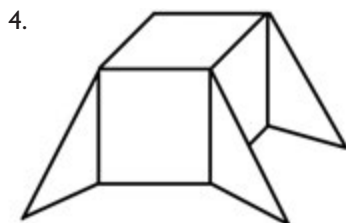
Поделити квадрат на 9 квадрата (поделити сваку страницу квадрата на трећине).



Савијте 4 мале дијагонале.

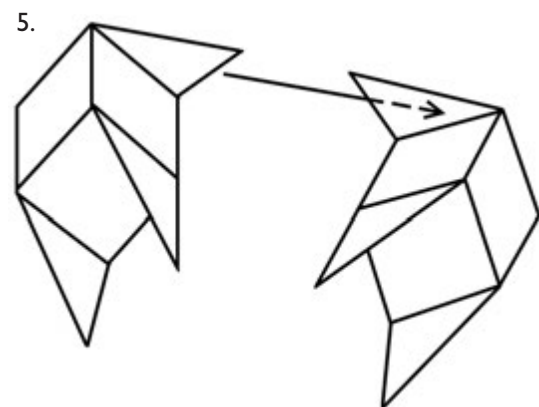


Савијте линије како је приказано. Ово је поглед одоздо.

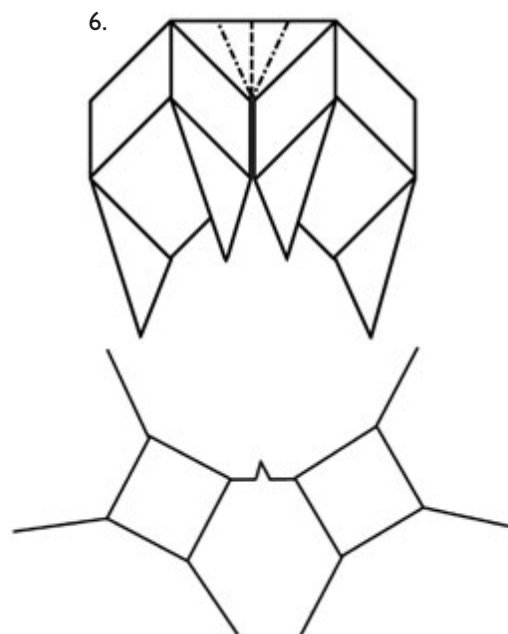


Завршен модул. Направите их 12.

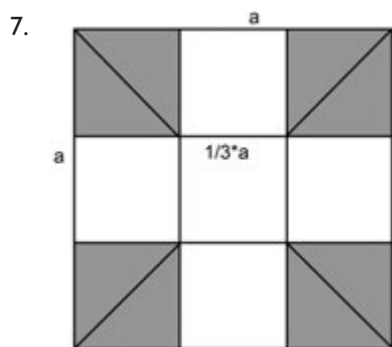
Склапање модула



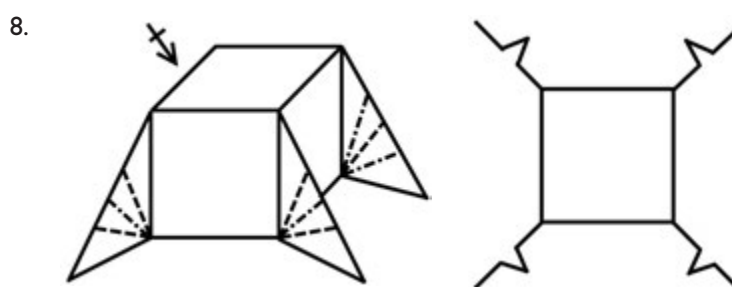
Уметните крилце првог модула у цеп (унутар крилца) другог модула. Увучите га што је више могуће



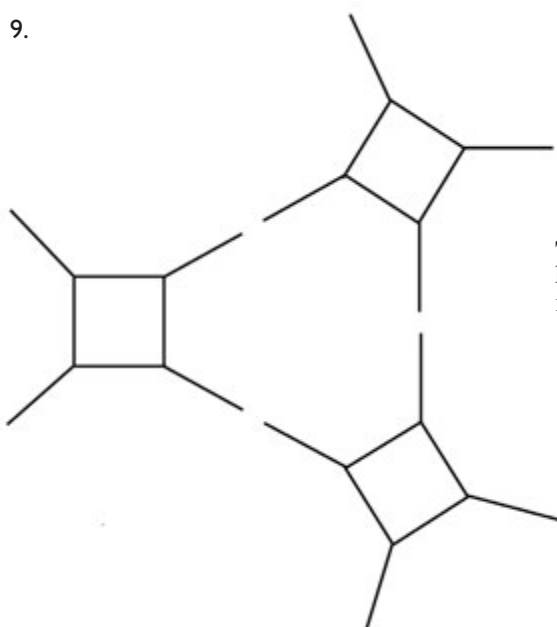
Савијте цик-цак шару са зракастим линијама.



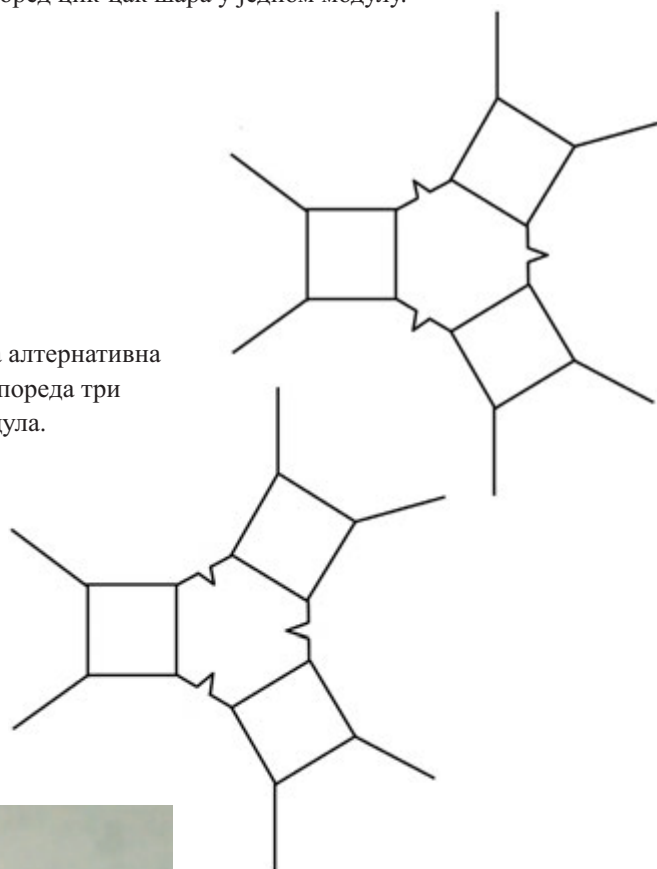
Сива површина означава
цик-цак део модула.



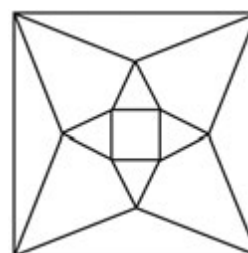
Распоред цик-цак шара у једном модулу.



Два алтернативна
распоред три
модула.



Склопите модуле према структури
кубоктаедра (модули одговарају
теменима). Постоје четири троугла
око сваког квадрата и три квадрата
око сваког троугла.

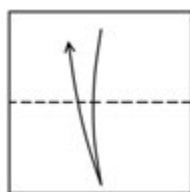




Питања за разознале

- Да ли је подела на трећине (корак 1) од суштинског значаја за ову конструкцију? Ако није, који услови заиста гарантују да ће редослед савијања функционисати?
- Да ли је квадратни облик папира од суштинског значаја за ову конструкцију? Ако није, који облик може да се користи и који услови савијања заиста гарантују да ће редослед савијања функционисати?
- Да ли је инструкција „Увуците га што је више могуће“ у кораку 5 од суштинског значаја за ову конструкцију? Ако није, које варијације су могуће?
- Да ли је кубооктаедар једина структура која се може добити као резултата склапања (савет: проучите Платонова и Архимедова тела).

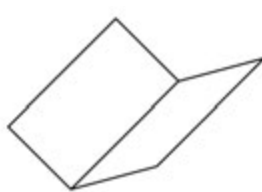
5 Символи



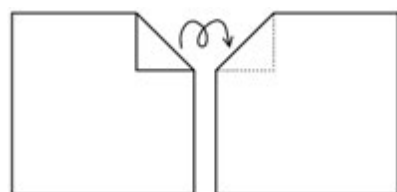
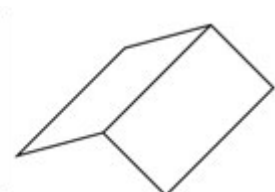
Савити и отворити



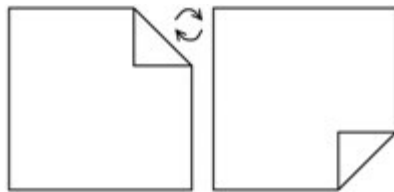
Удубљење



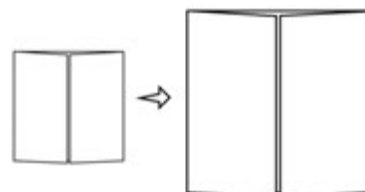
Испупчење



Окренути папир на другу страну



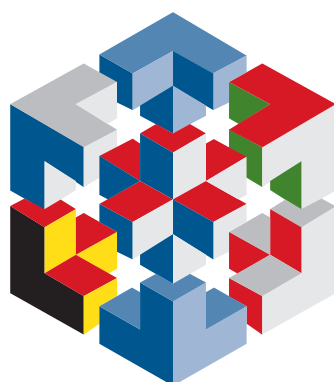
Ротирати папир



Увећани приказ



Поновити овде



VISUALITY & MATHEMATICS

EXPERIENTIAL EDUCATION
OF MATHEMATICS THROUGH
VISUAL ARTS, SCIENCES
AND PLAYFUL ACTIVITIES

